SIMULAZIONE ZANICHELLI 2025

DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

PER IL LICEO SCIENTIFICO

Si risolva uno dei due problemi e si risponda a 4 quesiti.

Problema 1

Sia $f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{|x|+1}$, con $a \in \mathbb{R}$.

a. Dimostra che, per qualsiasi valore di $a \in \mathbb{R}$, la funzione $f_a(x)$ è definita, continua e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostra poi che $f_a(x)$ ammette derivata seconda in $x = 0$ solo se $a = 0$.

b. Determina, in funzione di a, le coordinate del punto A di intersezione tra gli asintoti del grafico di $f_a(x)$.

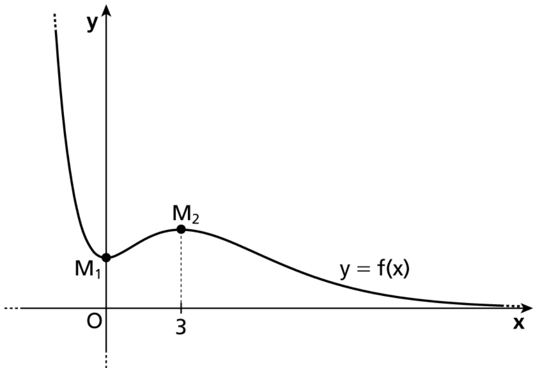
Poni ora $a = 2$.

c. Completa lo studio di funzione di $f_2(x)$ e traccia il suo grafico. Stabilisci in particolare se il grafico di $f_2(x)$ presenta o meno un punto di flesso e argomenta la tua risposta. Determina poi le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti al grafico di $f_2(x)$ nei punti in cui questo interseca l'asse x.

d. Considera il triangolo T formato dalle rette t_1 e t_2 determinate al punto precedente e dall'asse x. Internamente a T considera la regione di piano S delimitata dall'asse x e dal grafico di $f_2(x)$. Determina il rapporto tra l'area di S e l'area di T.

Problema 2

Il grafico in figura rappresenta una funzione $y = f(x)$ definita nel dominio $D = \mathbb{R}$ tale che i punti estremi relativi sono M_1 e M_2. La funzione è continua e derivabile almeno due volte nel suo dominio.



a. Deduci dal grafico di $f(x)$ i grafici qualitativi della sua derivata prima $y = f'(x)$ e della funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, specificando se ammettono zeri e punti estremi relativi.

b. Se $f(x)$ ha un'equazione del tipo $y = (ax^2 + bx + 2)e^{-\frac{x}{2}}$, quali sono i valori reali dei parametri a e b?

>>>segue

Hanno collaborato Francesco Benvenuti, Andrea Betti, Lorenzo Meneghini.

c. Verificato che i valori dei parametri ottenuti al punto precedente sono $a = 1$ e $b = 1$, sostituiscili nell'equazione di $f(x)$ e trova i punti di flesso della funzione ottenuta. Poi ricava le equazioni delle due rette tangenti al grafico di $f(x)$ condotte dal punto $P(-3; 0)$. Determina infine l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle due rette tangenti approssimando il suo valore in gradi e primi sessagesimali.

d. Sia $A(k)$, con $k > 0$, l'area della regione finita di piano compresa tra il grafico di $f(x)$, gli assi cartesiani e la retta $x = k$. Calcola il valore di $\lim_{k \to +\infty} A(k)$ e dai un'interpretazione grafica del risultato ottenuto.

Quesiti

1. In un dado a sei facce truccato il numero 6 esce con probabilità p. Il dado viene lanciato per sei volte. Determina la probabilità dei seguenti eventi:

A: «il numero 6 esce esattamente due volte»;

B: «il numero 6 esce esattamente tre volte».

Per quali valori di p l'evento A è più probabile dell'evento B?

2. Sono date le rette di equazioni:

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, \text{con } t \in \mathbb{R}; \qquad s: \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}.$$

a. Verifica che r e s sono sghembe.

b. Detto P il punto in cui r incontra il piano Oxy, trova l'equazione del piano che contiene s e passa per P.

3. Il trapezio isoscele $ABCD$ è circoscritto a una circonferenza di raggio r. La base maggiore AB è lunga il triplo della base minore CD. Determina l'ampiezza degli angoli del trapezio e il rapporto tra il raggio della circonferenza inscritta e la base minore.

4. Considera, nel piano cartesiano, la parabola γ: $y = -x^2 + 6x - 5$ e il fascio di parabole

$$\alpha_k: \; y = kx^2 - (7k + 1)x + 10k + 5$$

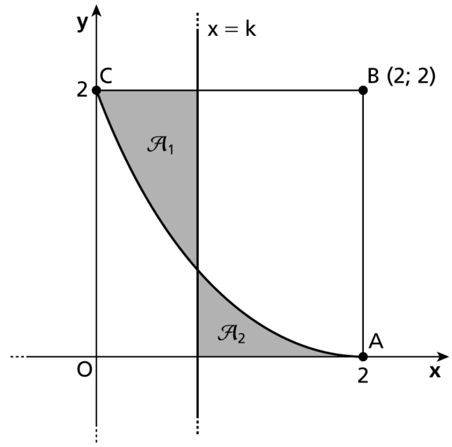
dove k è un numero reale positivo.

Verifica che γ e α_k hanno una coppia di punti in comune, indipendentemente dal valore di k. Determina poi il valore del parametro k in modo che l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici di γ e α_k sia 9.

5. Verifica che la funzione $F(x) = \int_x^{-1} \left(\frac{3}{2}t^2 + t - 2\right) dt$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1; 2]$, poi trova il punto (o i punti) in cui si verifica la tesi del teorema.

Hanno collaborato Francesco Benvenuti, Andrea Betti, Lorenzo Meneghini.

6. Nella figura sono rappresentati un arco della parabola di vertice $A(2; 0)$ che passa per il punto $C(0; 2)$ e il quadrato *OABC*. Considera la retta di equazione $x = k$ che interseca il quadrato *OABC* individuando le due regioni di piano $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ colorate in figura. Determina il valore del parametro k che minimizza la somma delle aree di $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$.



7. $p(x)$ è una funzione polinomiale pari di grado 4. Il suo grafico, in un sistema di riferimento cartesiano, ha un punto stazionario in $A(-\sqrt{2};\ -2)$ e passa per l'origine *O*. Determina le intersezioni tra il grafico di $p(x)$ e quello di $q(x) = \frac{p(x)}{x^3}$.

8. Determina il valore del parametro reale positivo a in modo che una delle tangenti inflessionali della funzione $f(x) = x^4 - 2ax^3$ abbia equazione $2x + y - 1 = 0$.

Verifica che, per quel valore di a, il grafico della parabola di equazione $y = -x^2$ è tangente a quello della funzione $f(x)$ nei suoi punti di flesso.

Hanno collaborato Francesco Benvenuti, Andrea Betti, Lorenzo Meneghini.