Liceo Scientifico “E. Fermi”

Anno scolastico: 2021-22

Seconda prova scritta dell’Esame di Stato

Tema: Matematica

Durata della prova: 5 ore

Cognome e Nome del candidato ………………………………………………………………

Il candidato risolva uno dei due problemi e quattro quesiti

Il candidato indichi il numero del problema e dei quesiti scelti:

Problema	Quesito	Quesito	Quesito	Quesito
………	………	………	………	………

È consentito l’uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico.
È consentito l’uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l’Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna del tema.

Problema 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - a}{e^x + b}$$

con a e b parametri entrambi positivi.

a) Si dimostri che $f(x)$ risulta crescente per qualunque valore attribuito ai parametri.
Si ricavino i valori di a e di b in modo che il punto di flesso appartenga all'asse y e che la tangente al grafico di $f(x)$ in tale punto sia inclinata di $\frac{\pi}{4}$ rispetto al semiasse positivo delle ascisse.

b) Assegnati i valori $a = 3$ e $b = 1$, si studi in modo completo la funzione ottenuta e si tracci il suo grafico. Si dimostri che il grafico della funzione è simmetrico rispetto al punto di flesso.

c) Si determini il dominio e si ricavi l'espressione analitica della funzione

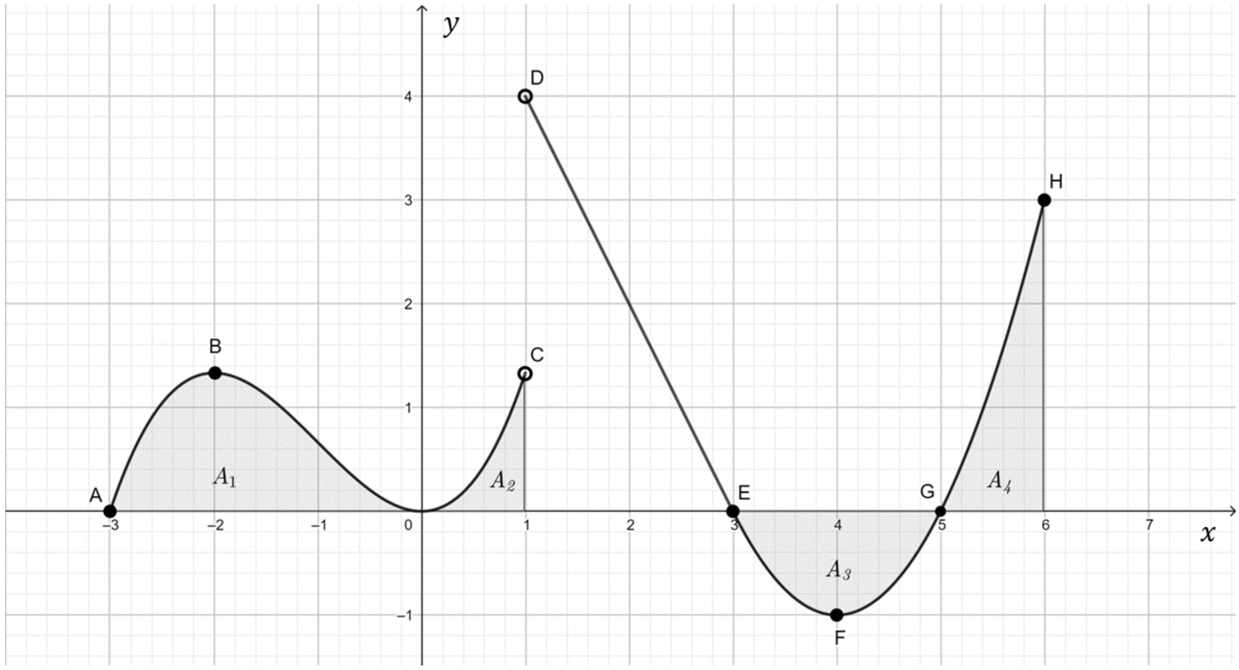
$$y = g(x) = f(\ln x)$$

Si rappresentino graficamente le funzioni $y = g(x)$ e $y = h(x) = g(|x|)$.
Si enunci il teorema di Lagrange, stabilendo poi se esso è applicabile alla funzione $h(x)$ nell'intervallo $[-1; 3]$.

d) L'asse delle x e il grafico della funzione $h(x)$ delimitano un triangolo mistilineo con un vertice nel punto $A(0; -3)$:
- si calcoli l'area del triangolo;
- si determini l'ampiezza degli angoli interni del triangolo mistilineo adiacenti all'asse delle x. L'angolo interno in un vertice di un triangolo mistilineo è definito come l'angolo formato dalle tangenti ai lati del triangolo in quel vertice.

Problema 2

In figura è riportato il grafico della funzione $y = f(x)$, che rappresenta la derivata prima di una funzione $F(x)$ definita e continua nell'intervallo $[-3; 6]$, tale che $F(-3) = 0$



Del grafico $y = f(x)$ sono note le seguenti caratteristiche:

- la funzione passa per l'origine e per i punti $A(-3; 0)$, $B\left(-2; \frac{4}{3}\right)$, $E(3; 0)$, $F(4; -1)$, $G(5; 0)$, $H(6; 3)$;
- i punti $C\left(1; \frac{4}{3}\right)$, $D(1; 4)$ non appartengono al grafico di $f(x)$;
- l'origine ed i punti B e F sono estremi relativi di $f(x)$;
- sono note le aree evidenziate in figura, delimitate dal grafico di $f(x)$ e dall'asse delle x: in particolare $A_1 = \frac{9}{4}$, $A_2 = \frac{5}{12}$ e $A_3 = A_4 = \frac{4}{3}$;
- il grafico della funzione fra D ed E è una retta e $f(x)$ è derivabile in E.

Partendo dal grafico della funzione $f(x)$ e dalle informazioni fornite:

a) dopo aver spiegato perché la funzione $F(x)$ non è derivabile in $x = 1$, si individuino gli intervalli in cui $F(x)$ è crescente, decrescente, concava e convessa;

b) si tracci il grafico probabile della funzione $F(x)$ dopo aver calcolato $F(1)$ e le coordinate di eventuali punti stazionari; si determini inoltre l'insieme immagine di $F(x)$;

c) si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $F(x)$ in $x = 2$ e il valor medio di $f(x)$ nell'intervallo $[2; 6]$;

d) si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{F(x)}{x+3} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^2} \qquad \lim_{x \to -3^+} \int_x^0 \frac{f(t)}{F(t)}\, dt$$

Quesito 1

Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}\sin(t^2)\ dt}{x^3}$$

Quali teoremi sono stati utilizzati per ottenere il risultato?

Quesito 2

Dopo avere enunciato il teorema degli zeri si dimostri che l'equazione $\sqrt{x}\ \cdot e^x = 1$ ammette una sola soluzione reale.

Quesito 3

Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx$$

Quesito 4

Considerata la funzione di equazione $f(x) = e^x$, si determinino sul grafico di f le coordinate del punto che ha distanza minima dalla retta di equazione $y - x + 2 = 0$.

Quesito 5

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = \ln(x^4 + x^2 + 1) \qquad \text{e} \qquad g(x) = e^{\sin^2 x}$$

Si dimostri che esiste almeno un punto x_0 interno all'intervallo $[-1; 1]$ tale che risulti

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

Quesito 6

Si dimostri che $\forall k \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = x^3 - (k+1)x^2 - 3x - 2$$

ammette un minimo e un massimo relativo.

Quesito 7

Dopo aver enunciato il teorema del valore medio per gli integrali definiti, si calcoli il valore medio della funzione

$$f(x) = |x^2 + x|$$

nell'intervallo $[-2; 1]$.

Quesito 8

Considerata la funzione equazione

$$f(x) = \begin{cases} (x-b)^2 \ se \ x \leq 2 \\ e^{a(x-2)} \quad se \ x > 2 \end{cases}$$

si calcolino i valori di a e b positivi in modo che $f(x)$ verifichi le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, \ln(2) + 2]$. Determinare inoltre il/i punto/i di cui il teorema garantisce l'esistenza.