Liceo Scientifico “E. Fermi”

Prontomath – breve prontuario di matematica per i test di ingresso

1 Numeri naturali e proprietà delle potenze

Ricorda la definizione di potenza e le proprietà delle potenze:
Si dice potenza di un numero un prodotto in cui i fattori sono tutti uguali fra loro.

$$5^4 = \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}_{\text{4 volte}} \qquad 3^5 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{5 volte}}$$

Il fattore che si ripete si dice **base**, il numero di volte in cui il fattore si ripete si dice **esponente**.

♠ Il **prodotto di potenze con la stessa base** si può scrivere come potenza avente per base la stessa base delle potenze di partenza e per esponente la **somma** degli esponenti. Esempio $4 \times 4^5 \times 4^6 = 4^{1+5+6} = 4^{12}$

♣ Il **quoziente di due potenze con la stessa base** si può scrivere come potenza avente per base la stessa base delle potenze di partenza e per esponente la **differenza** degli esponenti. Esempio $5^8 : 5^5 = 5^{8-5} = 5^3$

♡ La **potenza di una potenza** si può scrivere come potenza avente per base stessa base della potenza di partenza e per esponente il prodotto egli esponenti. Esempio $(6^2)^5 = 6^{(2\times5)} = 6^{10}$

♢ Il **prodotto di due potenze con lo stesso esponente** si può scrivere come una potenza avente come base il prodotto delle basi e come esponente quello delle potenze di partenza. Esempio $3^5 \times 6^5 = (3 \times 6)^5 = 18^5$

☺ Il **quoziente di due potenze con lo stesso esponente** si può scrivere come una potenza avente come base il quoziente delle basi e come esponente quello delle potenze di partenza. Esempio $12^7 : 6^7 = (12 : 6)^7 = 2^7$

Le cinque regole possono generalizzarsi: a, b, n, m siano numeri naturali

♠ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ prodotto di potenze con la stessa base

♣ $a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (m \geq n)$ quoziente di potenze con la stessa base

♡ $(a^m)^n = a^{m\times n}$ potenza di una potenza

♢ $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ prodotto di potenze con lo stesso esponente

☺ $a^m : b^m = (a : b)^m$ quoziente di potenze con lo stesso esponente

Esercizio 1 Risolvi le seguenti potenze con la stessa base:

- $2^4 \times 2^6 = 2^{4+6} = \dots$
- $3 \times 3^2 \times 3 =$
- $7^2 \times 7^3 \times 7 =$
- $10^5 \times 10 =$
- $7^{11} : 7^{10} =$
- $2^3 : 2 =$
- $5^8 : 5^6 =$
- $10^{10} : 10^5 =$
- $3 \times 3^2 = 3^{1+2} = \dots$
- $5^2 \times 5^3 =$
- $8^2 \times 8^4 =$
- $6 \times 6^3 \times 6^0 =$
- $2^8 : 2^4 =$
- $9^{14} : 9^{12} =$
- $9^{36} : 9^{12} =$
- $9^{14} : 9^5 =$

Esercizio 2 Risolvi le seguenti potenze con lo stesso esponente:

- $2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4 = \dots$
- $2^5 \times 5^5 =$
- $2^2 \times 4^2 \times 5^2 =$
- $12^5 : 3^5 =$
- $7^{11} : 7^{10} =$
- $2^3 : 2 =$
- $21^4 : 7^4 =$
- $24^7 : 6^7 =$
- $3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2 = \dots$
- $7^3 \times 5^3 =$
- $2^4 \times 5^4 \times 6^4 =$
- $56^3 \times 7^3 =$
- $2^8 : 2^4 =$
- $9^{14} : 9^{12} =$
- $19^8 : 19^8 =$
- $125^3 : 25^3 =$

Esercizio 3 Risolvi le seguenti potenze di potenze:

- $(2^2)^3 = 2^{2\times3} = \dots$
- $(2^5)^2 =$
- $(7^0)^5 =$
- $(4^4)^0 =$
- $(10^3)^8 =$
- $\{(7^5)^2\}^0 =$
- $(3^4)^3 = 3^{4\times3} = \dots$
- $(1^6)^3 =$
- $(3^{11})^4 =$
- $(5^4)^{13} =$
- $[(2^3)^2]^4 =$
- $[(5^5)^{10}]^2 =$

Esercizio 4 Scrivi sotto forma di un'unica potenza le seguenti espressioni, applicando le proprietà viste:

- $2^3 \times 2^2 \times 2^6 = \dots\dots$
- $5 \times 5^8 \times 5^2 = \dots\dots$
- $4^9 \times 4^2 : 4^{10} = \dots\dots$
- $9^7 : 9^4 \times 9^5 = \dots\dots$
- $10^{10} : 10^7 : 10^2 = \dots\dots$
- $(6^5)^4 : 6^{15} = \dots\dots$
- $(3^2 \times 3^4)^2 : (3^3 \times 3^5) = \dots\dots$
- $(8^7 : 8^5 : 8^0)^0 \times 8^3 = \dots\dots$
- $\{[(2^2)^2]^4\}^3 : 2^{45} = \dots\dots$
- $(6^3 \times 6^2 \times 6) : (6^9 : 6^7) = \dots\dots$
- $\{(9^{10} : 9^8)^0 \times (9^5 : 9)\}^4 = \dots\dots$
- $[(16^4 : 8^4) \times 2^5]^3 : 2^4 = \dots\dots$

Esercizio 5 Risolvi le espressioni utilizzando dove possibile le proprietà delle potenze:

5.1 $2^3 + [4^2 - 2^3 + (5^2 - 2 \times 2^3)] \times 1^3$ [25]

5.2 $3^3 - [(2^5 : 2^4)^2 + 2 \times 3^2] : (3^5)^0 + 6^2$ [41]

5.3 $(8^3 : 4^3)^2 + [4^3 + 3^4 - (2^2)^3 - (5^2 \times 5^3 : 5^4) \times 2^4]^8\} : 5 + [(10^2)^3]^0$ [14]

5.4 $(3^2 \times 2^2)^7 \times \{[(6^7 : 6^5 \times 6^3)^2]^3 : 6^{28} \times (6^{12})^0\}^2 : (6^4 \times 6^5)^2 + (9^{15} : 9^{14})^2 : 3^2$ [10]

Esercizio 6 semplifica le espressioni, facendo uso ovunque possibile delle proprietà delle potenze

6.1 $5^3 - 7 \times 3^2 + 17 \times 2 - 3 \times 2^4 - 2^3 + 2^2 \times 15$ [100]

6.2 $5^5 : 5^4 + 28 : 2^2 - 7^3 : 7^2 + 6 \times 5 - 2 \times 3$ [29]

6.3 $2^5 + 7 \times 2^2 - 3^3 - 2^2 \times 3 - 2^2 \times 5 + 2^2 \times 3^2 : 6 + 5^2 - 5^7 : 5^5$ [7]

6.4 $7 \times 2^3 - 2^5 - 2^{10} : 2^7 - 2^{30} : 2^{27} + 3^2 \times 3^3 - 3^2 + 6^9 : 6^8$ [248]

6.5 $9 \times 5^2 + 5^2 \times 7 - 3 \times 4^2 - 2^3 \times 5^2 - 6^2 \times 3 + 2^4 : 2^2$ [48]

6.6 $2^7 : 2^6 + 9^2 - 4^{10} : 4^9 - (47 - 2 \times 3^2) - 2 \times 3 \times 5$ [20]

6.7 $3 \times 5^2 - 2 \times (7^2 - 3^2 \times 5)^2 - (2^2 \times 7 - 5^5 : 5^3) \times 13 + 2 \times 3$ [10]

6.8 $\{2^4 : (6^2 - 5 \times 2^2) + [(7 \times 3 + 3^4 - 2)^2 : 10^3] : (7^2 - 2^2 \times 11) - 2\}^5$ [1]

6.9 $\{2 \times [2 \times 3^2 - 2 \times (3 \times 2^2 - 2 \times 5)^2 + (6 - 2^2) \times 2] - 3 \times 2^2\} : 2^2 - 1$ [3]

2 Scomposizioni in fattori, MCD e mcm

2.1 Scomposizione in fattori

Esempi di scomposizioni in fattori:

$$\begin{array}{r|l}
90 & 2\times 5 \\
9 & 3^2 \\
1 &
\end{array}$$

l'ultima cifra è 0 il numero è divisibile sia per 2 che per 5

$90 = 2\times 3^2\times 5$

$$\begin{array}{r|l}
114 & 2 \\
57 & 3 \\
19 & 19 \\
1 &
\end{array}$$

l'ultima cifra del numero è divisibile per due

la somma $5+7$ è divisibile per tre

$114 = 2\times 3\times 19$

$$\begin{array}{r|l}
288 & 2\times 2 \\
72 & 2\times 2 \\
18 & 2 \\
9 & 3\times 3 \\
1 &
\end{array}$$

le ultime due cifre del numero sono divisibili per 4

$288 = 2^5\times 3^2$

$$\begin{array}{r|l}
1980 & 2\times 5 \\
198 & 2 \\
99 & 3^2 \\
11 & 11 \\
1 &
\end{array}$$

$1980 = 2^2\times 3^2\times 5\times 11$

Esercizio 1 Scomponi in fattori primi i seguenti numeri:

176	$2^4\times 11$
312	$2^3\times 3\times 13$
636	$2^2\times 3\times 53$
840	$2^3\times 3\times 5\times 7$
2520	$2^3\times 3^2\times 5\times 7$
3150	$2\times 3^2\times 5^2\times 7$

Esercizio 2 Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:

540	$2^2\times 3^3\times 5$
1485	$3^3\times 5\times 11$
3675	$3\times 5^2\times 7^2$
4200	$2^3\times 3\times 5^2\times 7$
1440	$2^5\times 3^2\times 5$
13475	$5^2\times 7^2\times 11$

2.2 M.C.D e m.c.m.

Esempi di calcolo di massimo comune divisore e minimo comune multiplo

$$\begin{array}{r|l}
27 & 3 \\
9 & 3^2 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
128 & 2^2 \\
32 & 2^2 \\
8 & 2^3 \\
1 &
\end{array}$$

$27 = 3^3$ $\qquad$ $128 = 2^7$

M.C.D.$(27, 128) = 1$; $\qquad$ m.c.m.$(27, 128) = 2^7\times 3^3 = 3456$

$$\begin{array}{r|l}
125 & 5 \\
25 & 5^2 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
243 & 3 \\
81 & 3 \\
27 & 3^3 \\
1 &
\end{array}$$

$125 = 5^3$ $\qquad$ $243 = 3^5$

M.C.D.$(125, 243) = 1$; $\qquad$ m.c.m.$(125, 243) = 3^5\times 5^3 = 30375$

$$\begin{array}{l|l} 36 & 2^2 \\ 9 & 3^2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 48 & 2^2 \\ 12 & 2^2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$36 = 2^2 \times 3^2 \qquad 48 = 2^4 \times 3$$

$\text{M.C.D.}(36, 48) = 2^2 \times 3 = 12;$ $\text{m.c.m.}(36, 48) = 2^4 \times 3^2 = 144$

Esercizio 1 Calcola il M.C.D. ed il m.c.m. dei seguenti gruppi di numeri:

	M.C.D.	e	m.c.m.
$30, 36$	6	e	180
$88, 132$	44	e	264
$72, 48$	24	e	144
$20, 45, 99$	1	e	1980
$140, 145, 170$	5	e	69020
$72, 220, 385$	1	e	27720

Esercizio 2 Trova il m.c.m. tra le seguenti coppie o terne di numeri con il metodo della scomposizione in fattori primi (aiutandoti anche con la calolatrice):

	M.C.D.	e	m.c.m.
$20, 75$	5	e	300
$63, 147$	21	e	441
$12, 15, 18$	3	e	180
$882, 945$	63	e	13230
$441, 525, 567$	21	e	99225
$675, 392$	1	e	264600
$1050, 1125$	75	e	15750
$1452, 176$	44	e	5808
$1344, 1408$	64	e	29568
$1274, 728$	182	e	5096

3 L'insieme dei razionali assoluti

Come è noto, ad ogni frazione corrisponde un numero decimale, che si ottiene dividendo il numeratore per il denominatore e vi sono tre tipologie di numeri decimali

- decimali finiti
- decimali illimitati periodici semplici
- decimali illimitati periodici misti

I numeri decimali che si possono scrivere anche come frazioni si fanno parte di un insieme che si chiama *insieme dei numeri razionali assoluti*. **L'insieme dei razionali assoluti si indica con il simbolo** $\mathbb{Q}^+$.

Per capire a quale tipo di numero razionale dà origine una certa frazione, bisogna prima ridurre la frazione ai minini termini e poi scomporne in fattori primi il denominatore. Infatti si trova che...

una frazione genera un *decimale finito* se il suo denominatore scomposto in fattori primi contiene solo dei 2, dei 5 e delle loro potenze	$\frac{9}{50} = 0,18 \quad [50 = 2 \times 5^2]$ $\frac{29}{20} = 1,45 \quad [20 = 2^2 \times 5]$
una frazione genera un *decimale periodico semplice* se il suo denominatore scomposto in fattori primi non contiene né 2 né 5 ma solo altri numeri primi	$\frac{14}{33} = 0,\overline{42} \quad [33 = 3 \times 11]$ $\frac{10}{63} = 0,\overline{158730} \quad [63 = 3^2 \times 7]$
una frazione genera un *decimale periodico misto* se il suo denominatore scomposto in fattori primi contiene sia 2 e 5 che altri numeri primi	$\frac{13}{24} = 0,541\overline{6} \quad [24 = 2^3 \times 3]$ $\frac{8}{45} = 0,1\overline{7} \quad [45 = 3^2 \times 5]$

Regole per la costruzione della frazione *generatrice* di un numero decimale

	REGOLA	ESEMPI
Frazione generatrice di un decimale finito: $\frac{n_{DF}}{d_{DF}}$, **con**	n_{DF}=numero senza la virgola d_{DF}=un "1"seguito da tanti "0" quante sono le cifre decimali	① $2,\underbracket{34} = \frac{234}{1\underbracket{00}}$ ② $12,\underbracket{345} = \frac{12345}{1\,\underbracket{000}} = \frac{2469}{500}$
Frazione generatrice di un decimale illimitato, periodico semplice, $\frac{n_{PS}}{d_{PS}}$**, con:**	n_{PS} = differenza fra il numero senza virgola e la parte intera, che precede il periodo d_{PS} = tanti "9" quante sono le cifre del periodo	① $5,\underbracket{\overline{6}} = \frac{56-5}{\underbracket{9}} = \frac{17}{3}$ ② $3,\underbracket{\overline{45}} = \frac{345-3}{\underbracket{99}} = \frac{38}{11}$
Frazione generatrice di un decimale illimitato, periodico misto, $\frac{n_{PM}}{d_{PM}}$**, con:**	n_{PM} = differenza fra il numero senza virgola e tutta la parte del numero che precede il periodo d_{PM} = tanti "9" quante sono le cifre del periodo seguìti da tanti "0" quante sono le cifre dell'antiperiodo	① $0,1\overline{2} = \frac{12-1}{90} = \frac{11}{90}$ ② $1,23\overline{45} = \frac{12345-123}{9900} = \frac{679}{550}$

Esempio: classifica i seguenti numeri razionali assoluti e disponili in ordine crescente

$$1,\overline{58};\ 1,5\overline{8};\ 1,58;\ 1,586;\ 1,\overline{583};\ 1,5\overline{83};\ 1,58\overline{3}$$

$1,\overline{58}$	$\rightarrow$	decimale periodico semplice (1.5858 …)	$1,5\overline{8}$	$\rightarrow$	decimale periodico misto (1.5888 …)
$1,58$	$\rightarrow$	decimale finito (1.5800)	$1,586$	$\rightarrow$	decimale finito (1.5860)
$1,\overline{583}$	$\rightarrow$	decimale periodico semplice (1.5835 …)	$1,5\overline{83}$	$\rightarrow$	decimale periodico misto (1.5838 …)
$1,58\overline{3}$	$\rightarrow$	decimale periodico misto (1.5833 …)		$\rightarrow$	

$$1,58 < 1,58\overline{3} < 1,\overline{583} < 1,5\overline{83} < 1,\overline{58} < 1,586 < 1,5\overline{8}$$

3.1 Numeri decimali e frazioni

Per eseguire operazioni con i numeri decimali finiti possiamo procedere in due modi: operando direttamente con i numeri decimali oppure operando e con le frazioni corrispondenti: i due risultati coincidono Procedendo in entrambi i modi indicati calcoliamo il valore della seguente espressione

$$1 \text{ modo} \qquad 0,5 + 15,6 \times 0,1 - 0,3 = 0,5 + 1,56 - 0,3 = 1.76$$

$$2^\circ \text{ modo} \qquad 0,5 + 15,6 \times 0,1 - 0,3 = \frac{5}{10} + \frac{156}{10} \times \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{50 + 156 - 30}{100} = \frac{176}{100} = 1.76$$

Per eseguire operazioni con il numeri decimali periodici è invece necessario sostituire a tutti i numeri decimali le corrispondenti frazioni generatrici.

Esempio: calcoliamo il valore della seguente,espressione

$$2,\overline{3} + 0,1\overline{6} - 0,\overline{7} : 1,\overline{6} = \frac{23-2}{9} + \frac{16-1}{90} - \frac{7}{9} : \frac{16-1}{9} = \frac{21}{9} + \frac{15}{90} - \frac{7}{9} : \frac{15}{9} = \frac{7}{3} + \frac{1}{6} - \frac{7}{15} = \frac{70+5-14}{30} = \frac{61}{30}$$

Esercizio 1 Trasforma i seguenti numeri decimali nelle corrispondenti frazioni:

• $0,024$	• $0,00047$	$\left[\frac{3}{125}, \frac{47}{100000}\right]$
• $1,\overline{3}$	• $53,\overline{2}$	$\left[\frac{4}{3}, \frac{479}{9}\right]$
• $0,0\overline{5}$	• $15,03$	$\left[\frac{1}{18}, \frac{1503}{100}\right]$
• $232,75$	• $2,\overline{35}$	$\left[\frac{931}{4}, \frac{233}{99}\right]$
• $2,3\overline{5}$	• $4,\overline{623}$	$\left[\frac{106}{45}, \frac{4619}{999}\right]$

Esercizio 2 Calcola il valore delle seguenti espressioni dopo aver trasformato i numeri decimali nelle frazioni corrispondenti

2.1 $(0,3 + 0,5 \times 7) : 0,0\overline{6}$ [57]

2.2 $2,1 : 1,\overline{3} + 7 - 0,4 \times 0,\overline{63} \times 2,5 - 0,\overline{6} \times (4 - 0,\overline{45}) + 0,425$ [6]

2.3 $(2 + 0,\overline{3}) : [(0,75 - 0,\overline{3}) \times (2 - 1,2) + 1,08\overline{3} : (4 + 0.\overline{3})]$ [4]

2.4 $(1 - 0,1\overline{6}) : (1,3 - 0,4\overline{6}) - (0,35 + 0,1\overline{3} + 0,91\overline{6}) : (1 + 0,4)$ [0]

2.5 $1,\overline{3} : (1 + 0,\overline{6}) \times 0,1\overline{6} - 3 \times (0,1 + 0,0\overline{6})^2 - 0,8\overline{3}$ $\left[-\frac{47}{60}\right]$

2.6 $\{1,12 - [0,7 + 0,41\overline{6} \times 0,48]^2 \times \left[(0,\overline{6})^2 - (0,\overline{2})^2\right]\}^2 \times 12,5$ [8]

2.7 $\dfrac{3,5 + 1,\overline{037} \times 2,25}{1,1\overline{6} + 2,5 \times 0,7}$ [2]

4 L'insieme dei razionali relativi

L'insieme dei numeri razionali assoluti, $\mathbb{Q}^+$ è costituito da tutti i numeri che sono esprimibili come frazioni come visto nel paragrafo precedente.

Se i numeri razionali sono dotati di un segno, si parla di numeri razionali relativi: l'insieme dei numeri razionali relativi, o più semplicemente dei numeri razionali, si indica con il simbolo $\mathbb{Q}$.

Ciascun numero razionale è dotato di un segno e di un valore assoluto. Esempi

$-\frac{2}{3}$	$-$	segno	$+0,5\overline{6}$	$+$	segno
	$\frac{2}{3}$	valore assoluto		$0,5\overline{6} = \frac{17}{30}$	valore assoluto

È possibile stabilire una relazione d'ordine fra i numeri razionali e valgono le semplici regole

① Il numero zero è l'unico razionale privo di segno: zero è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo

② Ogni numero negativo è minore di ogni numero positivo

③ Due numeri relativi sono uguali se hanno uguale segno ed uguale valore assoluto

Per esempio: -5 e $-\frac{15}{3}$ sono uguali perché hanno uguale segno, negativo, inoltre $|-5| = 5$ e $\left|-\frac{15}{3}\right| = 5$

④ Di due numeri positivi disuguali è minore quello che ha valore assoluto minore

Per esempio: $+6 < +8$ perché $|+6| < |+8|$

⑤ Di due numeri negativi disuguali è minore quello che ha valore assoluto maggiore

Per esempio: $-12 < -10$ perché $|-12| > |-10|$

È possibile ordinare i numeri razionali su una retta, facendo corrispondere ad ogni numero razionale un punto della retta in modo univoco, a patto di avere fissato *un'origine*, *una unità di misura* e *un orientamento* (quest'ultimo, indicato con una "freccina", indica il verso in cui i numeri crescono). Valgono le seguenti osservazioni

① Al punto O, l'origine, corrisponde il numero zero

② Due numeri discordi hanno per immagine geometrica due punti che sono situati da parti opposte rispetto all'origine

③ Due numeri concordi hanno per immagine geometrica due punti che sono situati dalla stessa parte rispetto all'origine

④ Due numeri opposti hanno per immagine geometrica due punti corrispondenti nella simmetria di centro l'origine

⑤ Notazione sincopata: possiamo identificare i numeri relativi positivi con i numeri assoluti quindi potremo omettere il segno "+" davanti ai numeri positivi

Per esempio: la scrittura 2 equivale a +2

Esercizio 1 Su una retta orientata r, dopo aver fissato l'origine O l'unità di misura u e l'orientamento, rappresenta i punti immagine dei seguenti numeri relativi :

$-6; +5; +2; -4; -\frac{5}{2}; +\frac{1}{2}$ $\quad\left[-6 < -4 < -\frac{5}{2} < +\frac{1}{2} < +2 < +5\right]$

$+4; -3; -\frac{9}{2}; +0,5; +\frac{13}{4}; +\frac{3}{2}$ $\quad\left[-\frac{9}{2} < -3 < +0,5 < +\frac{3}{2} < +\frac{13}{4} < +4\right]$

$+\frac{7}{2}; -\frac{11}{3}; -5; +2; -\frac{5}{2}; 0; -1$ $\quad\left[-5 < -\frac{11}{3} < -\frac{5}{2} < -1 < 0 < +2 < +\frac{7}{2}\right]$

Esercizio 2 Disponi in ordine crescente i seguenti numeri relativi :

$+\frac{1}{2}; -1; -\frac{3}{2}; 0; -4; +\frac{3}{4}$ $\left[-4 < -\frac{3}{2} < -1 < 0 < +\frac{1}{2} < +\frac{3}{4}\right]$

$+4; -3; -\frac{9}{4}; +0,5; +\frac{4}{3}; +\frac{3}{2}$ $\left[-3 < -\frac{9}{4} < +0,5 < +\frac{4}{3} < +\frac{3}{2} < +4\right]$

$-3; +\frac{1}{2}; +\frac{7}{3}; -9; -1; +4; -\frac{7}{2}; -\frac{9}{5}; -7; +5$ $\left[-9 < -7 < -\frac{7}{2} < -3 < -\frac{9}{5} < -1 < +\frac{1}{2} < +\frac{7}{3} < +4 < +5\right]$

Esercizio 3 Semplifica le seguenti espressioni con i numeri relativi

3.1 $-\frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \left(5 + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(-2 + \frac{3}{2}\right)$ $[-5]$

3.2 $\left(-1 + \frac{11}{15} + \frac{1}{6}\right)^2 : \left(-\frac{10}{3} - \frac{3}{5} + \frac{23}{6}\right)$ $\left[-\frac{1}{10}\right]$

3.3 $\left[\left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right)\right]^3 + \left(-\frac{2}{15}\right)^2 : \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)^2$ $\left[\frac{17}{12}\right]$

3.4 $\left(1 - \frac{7}{15}\right) : \left[\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) - \left(-\frac{5}{9} + \frac{7}{15}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{3} + \frac{7}{6}\right)\right]$ $\left[\frac{2}{7}\right]$

3.5 $\left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 : \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

3.6 $\left[\frac{1}{3} + 1 + \left(-\frac{2}{3} - 1\right)\right] - \left\{-\frac{1}{2} - \left[-2 + \left(-1 - \frac{1}{3}\right)\right]\right\}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

3.7 $\left[\left(\frac{1}{27} + \frac{1}{6}\right) : \left(1 - \frac{19}{30}\right) - \frac{4}{9}\right] : \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(1 - \frac{4}{9}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{35}{6}\right)\right]$ $\left[+\frac{10}{9}\right]$

3.8 $\left(-1 - \frac{5}{24} + \frac{7}{12}\right) : \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{5}{8}\right) : \left(-\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{5}\right) - \left(1 + \frac{7}{3}\right)\right]$ $\left[-\frac{3}{4}\right]$

3.9 $\dfrac{\left(3 - \frac{7}{3}\right) - \left[-3 : \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^2\right]}{\left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 : \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]}$ $\left[\dfrac{-\frac{19}{12}}{-\frac{1}{2}} = \frac{19}{6}\right]$

3.10 $\dfrac{\left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{13}{14} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + \frac{7}{5}}{\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{4}\right) : \left(-\frac{5}{3}\right) - 12 \cdot \left(\frac{13}{20} - \frac{2}{3}\right)} \cdot \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)$ $\left[-\frac{11}{3}\right]$

5 Espressioni letterali ed equazioni

5.1 Espressioni letterali

Come è noto, un'espressione letterale è una scrittura algebrica in cui compaiono sia numeri che lettere: queste ultime giocano il ruolo di "contenitori", variabili che possono assumere una molteplicità di valori, come nella formula dell'area del triangolo $\mathscr{A} = \frac{b \times h}{2}$.

Esercizio Calcola il valore delle espressioni per i valori delle lettere che sono indicati a fianco:

espressione	**valori delle lettere**	**valore dell'espressione**
$2a + b - a^2 + 1$	$a = -1, b = +3$	$2 \cdot (-1) + (+3) - (-1)^2 + 1 = -2 + 3 - 1 + 1 = +1$
	$a = -2, b = 0$	
	$a = \frac{1}{2}, b = 1$	
$4x - 3y + 2xy - 2$	$x = 2, y = +3$	
	$x = 0, y = \frac{1}{3}$	
	$x = -1, y = -\frac{1}{2}$	

Riflettiamo sulle regole delle potenze dei numeri relativi : $\begin{cases} (-)^{\text{potenza pari}} = + \\ (-)^{\text{potenza dispari}} = - \end{cases}$

$-(-1)^2 = +1$	$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$	$(-1)^3 = +1$	$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$
$-(+1)^2 = -1$	$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$	$-(-1)^3 = +1$	$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$

Esercizio Dal linguaggio alla scrittura in simboli :

proposizione	**equazione**
La somma tra la metà di x e 5 è uguale a 7	$\frac{1}{3}x = 2$
La somma tra la metà di x e la metà di 5 è uguale a 7	
La metå della somma tra x e 5 è uguale a 12	
La differenza tra x e 8 è uguale a 2	

x supera 8 di2
y supera di 1 il doppio di 3
y supera di 1 il quadrato di 3
La differenza tra il quadrato di x e il quadrato di 5 è uguale a 1
II quadrato della differenza tra 5 e x è uguale a 1
La differenza tra x e il quadrato di 5 è uguale a 1
La media aritmetica di y e 8 è uguale al quadrato di y

Esercizio Traduci le proposizioni in equazioni o viceversa

proposizione	**equazione**
Un terzo di x uguale a 2	$\frac{1}{3}x = 2$
II successivo di x uguale a 20	
II doppio di x uguale a 5	
II doppio del successivo di x uguale a 12	
II successivo del doppio di x uguale a 7	
La differenza tra x e 41 uguale a 9	
	$3x = \frac{1}{2}$
II quadrato della somma di x e di -1 uguale alla somma del quadrato di x e di 4	
	$\frac{1}{2}x = 7$
	$(x + 1)^2$=16

5.2 Equazioni

Ricorda le definizioni sulle equazioni

- Si dice equazione in un'incognita, un'uguaglianza tra due espressioni contenenti una lettera detta incognita che diventa vera solo per particolari valori dell'incognita; tali valori si chiamano soluzioni dell'equazione.
- Un'equazione lineare (detta anche di I grado) è un'equazione in cui l'incognita ha esponente massimo pari a 1.
- Due equazioni si dicono *equivalenti* quando ammettono lo stesso *insieme* di soluzioni.
- un'equazione lineare (di primo grado) si dice *ridotta in forma normale* (F.N.) quando assume l'aspetto

$$ax = b \qquad \text{con } a \text{ e } b \text{ numeri interi}$$

Valgono poi le regole riassunte di seguito, che permettono di disporre l'equazione in forma normale e in seguito di discuterne la soluzione

I principio di equivalenza:	un'equazione si trasforma in un'equazione equivalente se si addiziona a entrambi i membri lo stesso numero o lo stesso polinomio. Il primo principio di equivalenza implica la legge del trasporto: è possibile trasportare da un membro all'altro di un'equazione un addendo, cambiando il suo segno.
II principio di equivalenza:	un'equazione si trasforma in un'equazione equivalente se si moltiplicano o si dividono entrambi i membri per una stessa espressione *diversa da zero*
Se $a \neq 0$ nella forma normale:	l'equazione è *determinata* e la sua soluzione è $x = \frac{b}{a}$
Se $a = 0$ nella forma normale:	l'equazione è *singolare* e non ammette una soluzione. L'equazione è indeterminata se $a = 0$ e $b = 0$, è impossibile se $a = 0$, ma $b \neq 0$

Esercizio 1 Verifica le seguenti uguaglianze:

uguaglianza	**valori**	**Sostituisci nell'uguaglianza i valori indicati a fianco, esegui i calcoli e scrivi se l'uguaglianza ottenuta é vera o falsa**	**Individua, tra i valori che hai sostituito, quelli che rendono vera ruguaglianza**
$x - 6 = 3x + 4$	$x = -3$	$-3-6 = 3\cdot(-3)+4 \Rightarrow -9 = 5$ uguaglianza falsa	$x = 5$
	$x = -4$		
	$x = -5$		
$x(x + 1) = 3x + x^2 + 2$	$x = 1$		
	$x = -1$		
	$x = 2$		
$3(y + 4) = 4y + 4$	$y = -2$		
	$y = 8$		
	$y = 3$		

$a(a-3)=a^2$	$a=0$
	$a=-1$
	$a=1$

Esercizio 2 Completa la tabella per righe come negli esempi

equazione	applica il primo principio	somma i monomi simili	insieme delle soluzioni
$x-5=7$	$x = 5+5 = 7+5$ (addiziono 5 a entrambi i membri)	$x=12$	$S=\{12\}$
$4x+3=3x+13$	$4x+3-3x-3 = 3x+13-3x-3$ (addiziono $-3x-3$ a entrambi i membri)	$x=10$	$S=\{10\}$
$x+7=10$			
$9x=8x+10$			
$5x+7=4x-3$			
$7-3x=5-4x$			
$7-7x=8-8x$			
$3x+4=2x+4$			

Esercizio 3 Completa la tabella per righe come negli esempi

equazione	applica il secondo principio	riduci	insieme delle soluzioni
$2x=3$	$\frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$ (divido per 2 entrambi i membri)	$x=\frac{3}{2}$	$S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$
$\frac{x}{5}=4$	$5\cdot\frac{x}{5} = 4\cdot 5$ (moltiplico per 5 entrambi i membri)	$x=20$	$S=\{20\}$
$5x=-8$			
$\frac{x}{2}=3$			
$-6x=0$			
$-\frac{x}{2}=3$			
$\frac{1}{34}x=\frac{1}{17}$			
$-x=21$			

Esercizio 4 Completa la tabella per righe come negli esempi

equazione	**riduci nella forma normale** $ax = b$	**classifica l'equazione** (determinata /indeterminata /impossibile)
$x - 3 = x - 2 + 4x + 3$	$x - 3 = 5x + 1; x - 5x = 1 + 3$	F.N. : -4x=4 determinata
$x + 3 = -(x + 2) + 2x + 5$	$x + 3 = x + 3$	F.N. : -0x=0 indeterminata
$-(x - 3) - (x - 2) = -2x + 1$	$-2x + 5 = -2x + 1$	F.N. : -0x=5 impossibile
$3(x - 1) = -(3x - 1) + 6x - 4$		
$2(y + 2) - (2y + 5) = -y$		
$\frac{x-3}{2} - \frac{x-1}{3} + 1 = \frac{x}{6} - 1$		
$\frac{x-5}{2} - \frac{3x-1}{4} = \frac{2x-1}{8} - 3$		

Esercizio 5 Completa la tabella per righe come negli esempi

equazione	riduci in forma normale	classifica e scrivi l'insieme delle soluzioni
$3x - 12 = \frac{1}{2}(2 - x) + 1$	$6x - 24 = 2 - x + 2$ F.N. :$7x = 28$	determinata, $x = \frac{28}{7}$ $S = \{4\}$
$3(x - 1) = 4(x - 3) + 2 - x + 7$	$3x - 3 = 4x - 12 + 2 - x + 7$ F.N. :$0x = 0$	indeterminata, $S = \{\forall x\}$
$3(2 - x) = 2(3 - x) + 7 - x$	$6x - 3x = 6 - 2x + 7 - x$ F.N. :$0x = 7$	impossibile, $S = \{\}$
$2(x - 3) - 7(2 - x) = x + 4$		
$\frac{2y-1}{3} - \frac{y-3}{4} - 1 = \frac{5y+2}{12}$		
$\frac{5x-2}{3} - \left(x - \frac{2x-1}{3}\right) = \frac{4}{3}x - 1$		

Esercizio 6 Risolvi le seguenti equazioni eseguendone poi la verifica, cioè controllando che la soluzione trovata soddisfi l'uguaglianza

6.1 $4(2x+1)-23=3(3-2x)$ $\quad S=\{2\}$

6.2 $9(x-2)=13(x+3)-9$ $\quad S=\{-12\}$

6.3 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x+1}{7}=x-2$ $\quad S=\{6\}$

6.4 $\dfrac{x+1}{10}-\dfrac{2x+1}{5}=\dfrac{2x-1}{5}-\dfrac{x-1}{2}+1$ $\quad S=\{-7\}$

6.5 $(x-3)(2x+5)+(x-2)^2=3(x^2-4x+1)$ $\quad S=\{2\}$

Esercizio 7 Discuti l'esistenza delle soluzioni delle seguenti equazioni stabilendo se esse sono determinate indeterminate o impossibili

7.1 $5(x-1)+2x=7(x-1)+2$ indeterminata

7.2 $3(x-4)-4(x-3)-20=2(3x-10)-7x$ indeterminata

7.3 $\dfrac{2x-5}{4}+\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{5\cdot(2-x)}{6}$ indeterminata

7.4 $\dfrac{x-5}{2}-\dfrac{x+9}{3}=x-4+\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{6}x$ impossibile

7.5 $(x-1)^2+10x=(x-2)(x+3)+7x$ iimpossibile

Esercizio 8 Trova l'equazione risolvente dei seguenti problemi aritmetici e risolvila:

8.1 La differenza fra un numero e la terza parte del suo successivo è pari a 17. Di che numero si tratta? [26]

8.2 Un numero è tale che la differenza fra il suo quadrato e il suo doppio è uguale alla differenza fra il quadrato del suo precedente e il numero stesso. Trova il numero. [1]

6 Relazioni fra grandezze, proporzionalità diretta ed inversa

6.1 Proporzioni

Ricorda le definizioni

- Si dice rapporto il risultato di una divisione.
- Si dice proporzione un'uguaglianza fra due (o più) rapporti:
  ⋆ Esempio⋆ $5 : 9 = 25 : 45$ che si legge "cinque sta a nove come venticinque sta a quarantacinque".
- In una proporzione il primo e il terzo termine si dicono **antecedenti**, il secondo e il quarto termine si dicono **conseguenti**:
  ⋆ Esempio ⋆ Nella proporzione $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = 4 : 6$ gli antecedenti sono $\frac{1}{2}$ e 4, i conseguenti sono $\frac{3}{4}$ e 6;
- In una proporzione il primo e il quarto termine si dicono **estremi**, il secondo e il terzo termine si dicono **medi**:
  ⋆ Esempio ⋆ Nella proporzione $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = 4 : 6$ gli estremi sono $\frac{1}{2}$ e 6, i medi sono $\frac{3}{4}$ e 4;
- Si chiama **continua** una proporzione i cui medi sono uguali:
  ⋆ Esempio ⋆ $12 : 6 = 6 : 3$ è una proporzione continua.

Ripassiamo brevemente le proprietà delle proporzioni

1 Proprietà **fondamentale** delle proporzioni: in una proporzione qualunque il prodotto dei medi è **sempre** uguale al prodotto degli estremi: $a : b = c : d \Leftarrow a \cdot c = b \cdot d$

⋆ Esempio ⋆

$\frac{2}{3} : \frac{1}{5} = \frac{5}{2} : \frac{3}{4}$ è una proporzione perché vale la proprietà fondamentale visto che $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

2 Proprietà **del permutare**: data una proporzione se ne ottiene un'altra equivalente (cioè in cui vale la proprietà fondamentale) se si scambiano fra loro i medi, oppure gli estremi, oppure sia i medi che gli estremi

$a : b = c : d \Rightarrow a : c = b : d$ oppure .
$a : b = c : d \Rightarrow d : b = c : a$ oppure
$a : b = c : d \Rightarrow d : c = b : a$

⋆ Esempio ⋆ Dalla proporzione $4 : 7 = 16 : 28$

si ottengono le tre proporzioni vere $4 : 16 = 7 : 28$, $28 : 7 = 16 : 4$, $28 : 16 = 7 : 4$

3 Proprietà **dell'invertire**: data una proporzione se ne ottiene un'altra equivalente (cioè in cui vale la proprietà fondamentale) se si scambia in essa ciascun antecedente con il proprio conseguente $a : b = c : d \Rightarrow b : a = d : c$

⋆ Esempio ⋆ Dalla proporzione $4 : 7 = 16 : 28$

si ottiene, applicando la proprietà dell'invertire $7 : 4 = 28 : 16$

4 Proprietà del **comporre**: data una proporzione se ne ottiene un'altra se si sostituisce a **ciascun** antecedente la somma fra quell'antecedente e il suo conseguente, e ciò vale anche per i conseguenti secondo lo schema:

$a : b = c : d \Rightarrow (a + b) : b = (c + d) : d$
oppure
$a : b = c : d \Rightarrow a : (a + b) = c : (c + d)$

⋆ Esempio ⋆ Dalla proporzione $10 : 6 = 5 : 3$

si ottengono le proporzioni $(10 + 6) : 6 = (5 + 3) : 3$ e $10 : (10 + 6) = 5 : (5 + 3)$

5 Proprietà dello **scomporre**: data una proporzione se ne ottiene un'altra se si sostituisce a **ciascun** antecedente la differenza fra quell'antecedente e il suo conseguente, e ciò vale anche per i conseguenti, secondo lo schema:

$a : b = c : d \Rightarrow (a - b) : b = (c - d) : d$
oppure
$a : b = c : d \Rightarrow a : (a - b) = c : (c - d)$

⋆ Esempio ⋆ Dalla proporzione $10 : 6 = 5 : 3$

si ottengono le proporzioni $(10 - 6) : 6 = (5 - 3) : 3$ e $10 : (10 - 6) = 5 : (5 - 3)$

6 Per trovare il termine incognito di una proporzione si utilizza la proprietà fondamentale e procede così :

1) Se il termine incognito è un medio si moltiplicano fra loro gli estremi e si divide per il medio noto

⋆ Esempio ⋆ $\frac{1}{3} : x = \frac{10}{3} : \frac{50}{7} \quad \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot \frac{50}{7} : \frac{10}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{50}{7} \cdot \frac{3}{10} = \frac{5}{7}$

2) Se il termine incognito è un estremo si moltiplicano fra loro i medi e si divide per l'estremo noto

⋆ Esempio ⋆ $14 : 7 = 8 : x \quad \Rightarrow x = 7 \cdot 8 : 14 = 56 : 14 = 4$

Esercizio 1 Individua quali fra le seguenti coppie di rapporti formano una proporzione (puoi fare uso della proprietà fondamentale, o della definizione di proporzione come uguaglianza fra due rapporti):

$32 : 4$ e $64 : 8$ $\begin{cases} \text{sì } \circ \\ \text{no } \circ \end{cases}$ $72 : 9$ e $48 : 8$ $\begin{cases} \text{sì } \circ \\ \text{no } \circ \end{cases}$ $30 : 2$ e $160 : 20$ $\begin{cases} \text{sì } \circ \\ \text{no } \circ \end{cases}$

$90 : 10$ e $27 : 3$ $\begin{cases} \text{sì } \circ \\ \text{no } \circ \end{cases}$ $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{160}$ $\begin{cases} \text{sì } \circ \\ \text{no } \circ \end{cases}$ $\frac{8}{3}$ e $\frac{16}{9}$ $\begin{cases} \text{sì } \circ \\ \text{no } \circ \end{cases}$

$2,4 : 0,3$ e $1,6 : 0,4$ $\begin{cases} \text{sì } \circ \\ \text{no } \circ \end{cases}$ $6 : 1,2$ e $2 : 0,4$ $\begin{cases} \text{sì } \circ \\ \text{no } \circ \end{cases}$ $\frac{22}{7} : \frac{3}{11}$ e $\frac{6}{7} : \frac{1}{2}$ $\begin{cases} \text{sì } \circ \\ \text{no } \circ \end{cases}$

Esercizio 2 Individua mentalmente se ciascuna delle seguenti proporzioni è vera o falsa in base alla proprietà fondamentale

a) 4:3=6:5 $\boxed{V}\boxed{F}$ *d*) 3:2=4:5 $\boxed{V}\boxed{F}$ *g*) 7:2=14:4 $\boxed{V}\boxed{F}$

b) 5:3=10:6 $\boxed{V}\boxed{F}$ *e*) 4:3=2:1 $\boxed{V}\boxed{F}$ *h*) 9:3=6:2 $\boxed{V}\boxed{F}$

c) 3:5=4:2 $\boxed{V}\boxed{F}$ *f*) 4:8=3:6 $\boxed{V}\boxed{F}$ *i*) 10:4=8:3 $\boxed{V}\boxed{F}$

Esercizio 3 Completa la tabella seguendo l'esempio

Proporzione	Antecedenti	Conseguenti	Medi	Estremi	Valore del rapporto
$30 : 5 = 12 : 2$	30 e 12	5 e 2	5 e 12	30 e 2	$30 : 5 = 6$
$20 : 30 = 4 : 6$					
$8 : 4 = 20 : 10$					
$20 : 25 = 4 : 5$					
$30 : 6 = 20 : 4$					
$12 : 6 = 6 : 3$					

Esercizio 4 Completa la tabella come nell'esempio svolto

1^a proporzione	2^a proporzione	proprietà applicata
9:15=3:5	15:9=5:3	invertire
30:3=20:2	30:20=3:2	
6:3=20:10	10:3=20:6	
20:5=16:4	5:20=4:16	
30:6=20:4	4:20=6:30	
12:6=6:3	(12+6):6=(6+3):3	
40:16=5:2	(40-16):16=(5-2):2	

Esercizio 5 Risolvi le proporzioni

$6 : x = 3 : 2 \qquad 6 : 9 = x : 18 \qquad 15 : 20 = 6 : x \qquad [4; 12; 18]$

$6 : 2 = 15 : x \qquad 45 : 6 = 15 : x \qquad 18 : x = 12 : 4 \qquad [5; 2; 6]$

$\frac{8}{3} : \frac{5}{7} = \frac{14}{5} : x \qquad 0,4 : 0,9 = x : 5,4 \qquad \frac{6}{5} : x = \frac{14}{15} : \frac{7}{4} \qquad \left[\frac{3}{4}; \frac{12}{5}; \frac{9}{4}\right]$

$\frac{3}{4} : \frac{9}{8} = x : \frac{8}{3} \qquad \frac{9}{4} : \frac{3}{8} = \frac{9}{2} : x \qquad \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{3}{4} : x \qquad \left[\frac{16}{9}; \frac{3}{4}; \frac{2}{3}\right]$

Esercizio 6 Risolvi le proporzioni continue

$2 : x = x : 32 \qquad 9 : x = x : 4 \qquad 18 : x = x : 8 \qquad [8; 6; 12]$

$3 : x = x : 27 \qquad 48 : x =: x : 12 \qquad 12 : x = x : 75 \qquad [9; 24; 30]$

$\frac{9}{25} : x = x : \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{3} : x = x : \frac{16}{3} \qquad \frac{1}{27} : x = x : \frac{4}{3} \qquad \left[\frac{3}{10}; \frac{4}{3}; \frac{2}{9}\right]$

Esercizio 7 Risolvi le seguenti proporzioni applicando le proprietà del comporre o dello scompore :

$(6 + x) : x = 15 : 10 \qquad (4 + x) : x = 7 : 3 \qquad (7 - x) : x = 15 : 6 \qquad [12; 3; 2]$

$(8 - x) : x = 12 : 6 \qquad (5 + x) : x = 40 : 8 \qquad 34 : 18 = (8 + x) : x \qquad \left[\frac{8}{3}; \frac{5}{4}; 9\right]$

$12 : 42 = x : (18 - x) \qquad 36 : 9 = (10 - x) : x \qquad 48 : 36 = (x + 7) : x \qquad [4; 2; 21]$

Esercizio 8 Trova i due termini incogniti x e y applicando la proprietà del comporre o dello scomporre in maniera opportuna

$x : y = 5 : 15$ essendo $x + y = 12$ [3; 9]

$x : y = 5 : 35$ essendo $x + y = 56$ [7; 49]

$x : y = 18 : 12$ essendo $x - y = 12$ [36; 24]

$x : y = 95 : 25$ essendo $x + y = 24$ [19; 5]

Esercizio 9 Con l'ausilio di una proporzione, risolvi i problemi (costruisci la figura)

In un triangolo rettangolo la somma delle misure dei catetivale $c_1 + c_2 = 92\,cm$ ed essi stanno nella proporzione $c_1 : c_2 = 8 : 15$. Calcola la misura dei cateti del triangolo e il suo perimetro [$32\,cm$; $60\,cm$; $160\,cm$]

In un rettangolo il perimetro misura 210 m ed il rapporto fra le due dimensioni è $\frac{2}{19}$. Calcola l'area del rettangolo. [950m^2]

In un triangolo rettangolo i due angoli acuti hanno per rapporto $\frac{11}{7}$. Calcola le loro ampiezze. [55°; 35°]

6.2 Proporzionalità diretta ed inversa fra grandezze

Si chiama *grandezza* una qualunque quantità misurabile: per poter misurare una grandezza è necessario fissare una *unità di misura* (presa come campione unitario della grandezza da misurare), e dei multipli e sottomultipli di tale unità di misura.

La misura di una grandezza G per via diretta, si effettua contando quante volte l'unità di misura (ed eventualmente i suoi sottomultipli) sono contenuti in G.

Alcuni esempi di grandezza e di unità di misura corrispondenti sono:

grandezza	**unità di misura** (nel sistema internazionale)	**simbolo della udm**
tempo	secondo	s
lunghezza	metro	m
massa	chilogrammo	kg
temperatura	grado centigrado (o Kelvin)	$°C(K)$
intensità di corrente	Ampère	A
velocità	metri al secondo	m/s
peso(forza)	Newton	N

Ricordiamo le definizioni di insiemi (o *classi*) di grandezze direttamente e inversamente proporzionali

Due insiemi di grandezze $Y = \{y_1, y_2 \dots y_n\}$ e $X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ si dicono $\boxed{\text{direttamente proporzionali}}$ se raddoppiando / triplicando / quadruplicando .... le grandezze del primo insieme (X), raddoppiano / triplicano / quadruplicano .... anche le corrispondenti grandezze del secondo insieme (Y)	se due insiemi di grandezze sono direttamente proporzionali, allora è costante il *rapporto* $k = \frac{y_a}{x_a}$ fra una grandezza del secondo insieme e quella che le corrisponde nel primo insieme, tale costante si dice coefficiente di proporzionalità diretta (k_{DIR})
⋆ Il perimetro (Y) di un quadrato è direttamente proporzio nale al suo lato (X)	è costante ed uguale a 4 il rapporto fra il perimetro di un quadrato generico e il suo lato
• La quantità di lavoro svolta (Y) è (in prima approssimazione) direttamente proporzionale al tempo impiegato per svolgerla (X)	è quindi costante il rapporto fra la quantità di lavoro svolta e il tempo impiegato a svolgerla
☺ Il costo di quella merce (Y) è (in prima approssimazione) direttamente proporzionale al quantitativo di merce acquistato (X)	è quindi costante il rapporto tra il denaro speso per acquistare un prodotto e il suo quantitativo e tale rapporto si misura in €$/kg$
Due insiemi di grandezze $Y = \{y_1, y_2 \dots y_n\}$ e $X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ si dicono $\boxed{\text{inversamente proporzionali}}$ se raddoppiando / triplicando / quadruplicando .... le grandezze del primo insieme (X), le corrispondenti grandezze del secondo insieme (Y) diventano la metà / un terzo / un quarto	se due insiemi di grandezze sono inversamente proporzionali, allora è costante il *prodotto* $k = y_a \cdot x_a$ fra una grandezza del secondo insieme e quella che le corrisponde nel primo insieme; tale costante si dice coefficiente di proporzionalità inversa (k_{INV})
⋆ Il numero di operai (Y) è (in prima approssimazione) inversamente proporzionale al tempo impiegato a svolgere un lavoro fissato (X)	è quindi costante il prodotto fra il numero di operai e il tempo impiegato per svolgere un fissato lavoro
☺ La velocità (Y) a cui ci si muove compiendo un tragitto fissato è inversamente proporzionale al tempo impiegato (X)	è quindi costante il prodotto fra la velocità e il tempo impiegato e tale prodotto costituisce la lunghezza del percorso

Infine:

- il grafico della relazione di proporzionalità diretta è una (semi)retta che passa per l'origine;
- il grafico della relazione di proporzionalità inversa è un (ramo di) iperbole

---

Esercizio 1 Considera la funzione $y = 3x$ e completa le seguenti frasi:

a) La funzione $y = 3x$ esprime una legge di proporzionalità ....;
b) Il coefficiente di proporzionalità .... è ....;
c) Se il valore di x è 5, il valore di y è ....;
d) Se il valore di y è $\frac{1}{3}$, il valore di x è ....;
e) Il grafico della funzione è ....

Esercizio 2 Considera la funzione $y = \frac{5}{x}$ e completa le seguenti frasi:

a) La funzione $y = \frac{5}{x}$ esprime una legge di proporzionalità ....;
b) Il coefficiente di proporzionalità .... è ....;

c) Se il valore di x è 10, il valore di y è ....;

d) Se il valore di y è 5, il valore di x è ....;

e) Il grafico della funzione è ....

Esercizio 3 Indica se ciascuna delle seguenti uguaglianze esprime o no una legge di proporzionalità diretta:

a)	$y = x$	V F	d)	$y = 4x$	V F	g)	$y = \frac{5}{3}x$	V F
b)	$y = 3x + 1$	V F	e)	$y = -x$	V F	h)	$y = \frac{4}{3}x + 1$	V F
c)	$y = x - 1$	V F	f)	$y = x^2$	V F	i)	$y = 3 - 2x$	V F

Esercizio 4 Indica se ciascuna delle seguenti uguaglianze esprime o no una legge di proporzionalità inversa:

a)	$y = 3x + 1$	V F	d)	$y = \frac{15}{x}$	V F	g)	$y = \frac{3}{5}x$	V F
b)	$y = \frac{2}{x}$	V F	e)	$y = \frac{1}{x^2}$	V F	h)	$y = \frac{4}{3x}$	V F
c)	$xy = 10$	V F	f)	$x = \frac{4}{y}$	V F	i)	$y = \frac{3}{2x} - 2$	V F

Esercizio 5 Indica se ciascuna delle affermazioni che seguono è vera o falsa e giustifica la risposta:

a)	Il lato ed il perimetro di un triangolo equilatero sono grandezze direttamente proporzionali	V F
b)	Il lato ed il perimetro di un quadrato sono grandezze direttamente proporzionali	V F
c)	Il lato e l'area di un quadrato sono grandezze direttamente proporzionali	V F
d)	L'uguaglianza $y = 3 \cdot x$ rappresenta una relazione di proporzionatà diretta	V F
e)	L'uguaglianza $y = x^2$ rappresenta una relazione di proporzionalità inversa	V F
f)	L'uguaglianza $y = 5x + 2$ rappresenta una relazione di proporzionalità diretta	V F
g)	Due grandezze sono direttamente proprorzoinali se è costante la somma dei loro valori corrispondenti	V F
h)	Due grandezze sono inversamente proprorzionali se è costante il prodotto dei loro valori corrispondenti	V F
i)	La base e l'altezza di rettangoli equivalenti sono grandezze inversamente proporzionali	V F
l)	L'uguaglianza $xy = 12$ rappresenta una legge di proporzionalità inversa	V F

Esercizio 6 Per ognuna delle tabelle che seguono, rappresenta le grandezze nel piano cartesiano, specifica se si tratta di relazioni di proporzionalità diretta o inversa, trova il coefficiente di proporzionalità e scrivi la relazione fra y e x.

x	3	6	9	12
y	4	8	12	16

;

x	2	4	8	12
y	12	6	3	2

;

x	2	5	10	20
y	40	16	8	4

$\left[k_D = \frac{4}{3}; k_I = 24; k_I = 80\right]$

x	4	5	7	9
y	12	15	21	27

;

x	3	6	18	27
y	18	9	3	2

;

x	5	10	15	20
y	3	6	9	12

$\left[k_D = 3; k_I = 54; k_D = \frac{5}{3}\right]$

x	3	6	12	30
y	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$

;

x	1	3	9	27
y	81	27	9	3

;

x	5	10	15	20
y	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

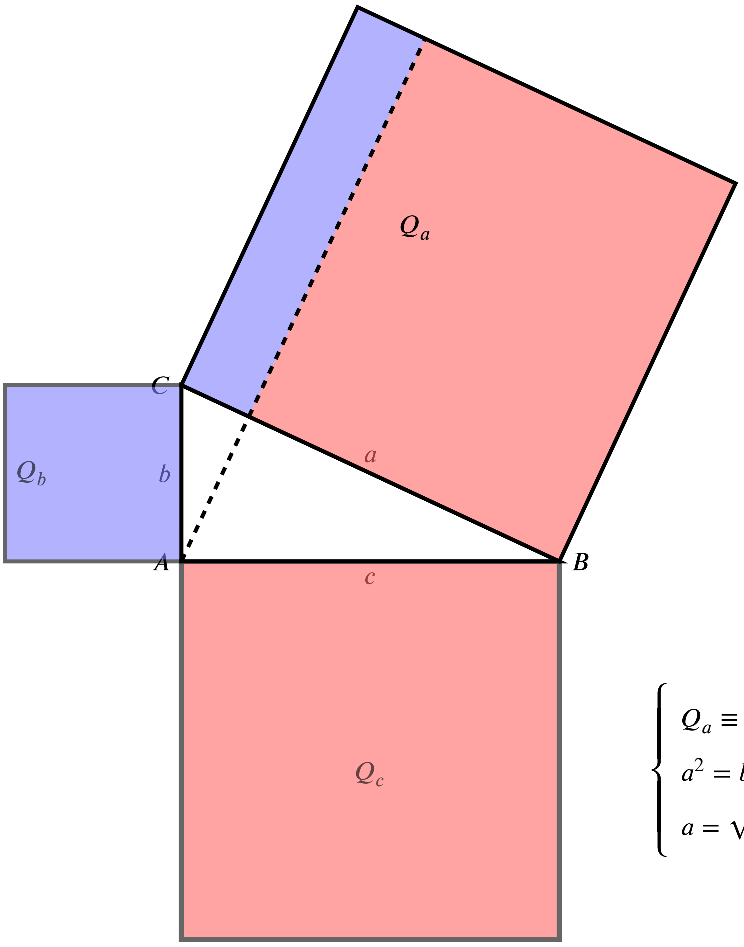
$\left[k_I = 15; k_I = 81; k_D = \frac{1}{10}\right]$

7 Teorema di Pitagora

Ricorda l'enunciato del teorema di Pitagora:

``In qualunque triangolo rettangolo, l'area del quadrato che ha come lato l'ipotenusa

è uguale alla somma delle aree dei quadrati che hanno come lati i cateti.''



$$\begin{cases} Q_a \equiv Q_b + Q_c & Q_b \equiv Q_a - Q_c & Q_c \equiv Q_a - Q_b \\ a^2 = b^2 + c^2 & b^2 = a^2 - c^2 & c^2 = a^2 - b^2 \\ a = \sqrt{b^2 + c^2} & b = \sqrt{a^2 - c^2} & c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

Il teorema di Pitagora ha moltissime applicazioni nella geometria elementare, vediamone alcune riferendoci alle figure della pagina successiva:

1. Calcolo della diagonale di un rettagolo di base b e altezza h date.

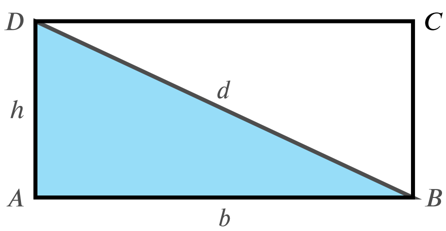


Figura 1: Basta osservare che la diagonale d divide il rettangolo in due triangoli rettangoli congruenti per ottenere, applicando su tali triangoli il teorema di Pitagora, le relazioni : $d = \sqrt{b^2 + h^2}$, oppure le formule inverse $b = \sqrt{d^2 - h^2}$, $h = \sqrt{d^2 - b^2}$.

2. Calcolo della diagonale di un quadrato di lato ℓ dato.

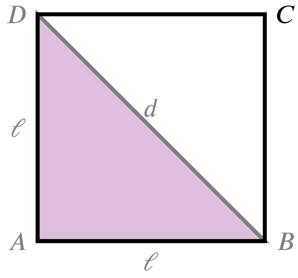


Figura 2: Con un ragionamento analogo a quello fatto per il rettangolo si trova : $d = \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \sqrt{2l^2}$, cioè $d = \ell \cdot \sqrt{2}$, oppure viceversa $\ell = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$. (Il numero irrazionale $\sqrt{2}$ vale $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$.)

3. Calcolo dell'altezza di un triangolo ISOSCELE di base b e lato obliquo l dati.

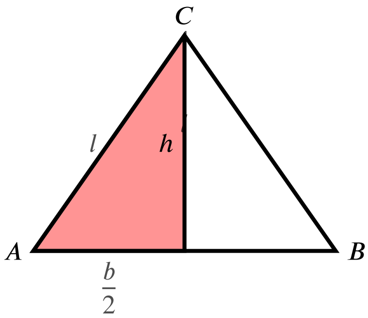


Figura 3: Basta osservare che l'altezza h divide il triangolo isoscele in due triangoli rettangoli congruenti che hanno cateti h e $\dfrac{b}{2}$ per ottenere: $l = \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + h^2}$, oppure le formule inverse $h = \sqrt{l^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2}$, $\dfrac{b}{2} = \sqrt{l^2 - h^2}$.

4. Calcolo del lato l di un rombo di diagonali d_1 e d_2 date.

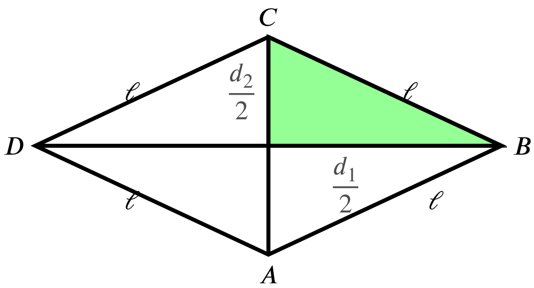


Figura 4: Basta osservare che le diagonali dividono il rombo in quattro triangoli rettangoli congruenti di cateti $\dfrac{d_1}{2}$ e $\dfrac{d_2}{2}$; applicando a uno qualunque dei triangoli il teorema di Pitagora si trovano le relazioni: $\ell = \sqrt{\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2}$, oppure la formula inversa $\dfrac{d_1}{2} = \sqrt{\ell^2 - \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2}$

5. Calcolo del lato obliquo ℓ di un trapezio isoscele di altezza h, base maggiore b_2 e base minore b_1:

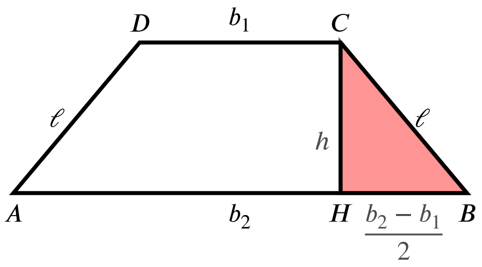


Figura 5: Osserviamo che le altezze dividono il trapezio isoscele in un rettagolo e due triangoli rettangoli congruenti (vedi figura) di cateti h e $\frac{b_2 - b_1}{2}$. Applicando il teorema di Pitagora a tali triangoli si ottengono le relazioni $\ell = \sqrt{\left(\frac{b_2 - b_1}{2}\right)^2 + h^2}$, o le inverse $h = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{b_2 - b_1}{2}\right)^2}$, $\frac{b_2 - b_1}{2} = \sqrt{\ell^2 - h^2}$

Esercizio 1 Con l'aiuto delle tavole numeriche verifica quali delle seguenti terne sono pitagoriche e quali non lo sono come nell'esempio:
$a = 77, b = 36, c = 85$ è una terna pitagorica poiché $77^2 + 36^2 = 5929 + 1296 = 7225$ e $85^2 = 7225$, ma
$a = 5, b = 6, c = 7$ NON è una terna pitagorica poiché $5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$ e $7^2 = 49 \neq 61$

a=7, b= 24, c=25	$25^2 = 24^2 + 7^2$
a=8, b=15, c=17	$17^2 = 15^2 + 8^2$
a=5, b=6, c=12	no
a=12, b=35, c=37	
a=7, b=8, c=15	
a=55, b=48, c=73	
a=10, b=12, c=17	
a=15, b=112, c=113	

Esercizio 2 Facendo uso del teorema di Pitagora trova il lato incognito nei seguenti triangoli rettangoli (a è la misura dell'ipotenusa), seguendo gli esempi indicati:

c	b	a
$3\,cm$	$4\,cm$	quindi $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\,cm$
$8\,cm$	quindi $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15\,cm$	$17\,cm$
quindi	$40\,cm$	$58\,cm$
$21 cm$	$20\,cm$	quindi ......
$5\,cm$	quindi	$13\,cm$

quindi ……	$1,5\,cm$	$2,5\,cm$
$92\,cm$	$69\,cm$	quindi ……

Esercizio 3 Calcola la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo conoscendo le misure dei cateti, che sono di $70\,cm$ e $24\,cm$.

Esercizio 4 Calcola la misura del cateto di un triangolo rettangolo sapendo che l'ipotenusa misura 130 m e l'altro cateto 32 m.

Esercizio 5 L'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura $65\,cm$ e uno dei suoi cateti $52\,cm$. Calcola il perimetro e l'area del triangolo.

Esercizio 6 Risolvi i seguenti problemi che richiedono l'applicazione del teorema di Pitagora disegnando con precisione la figura e scrivendone proprietà e relazioni

1- In un triangolo isoscele la base e l'altezza ad essa relativa misurano rispettivamente $84\,cm$ e $40\,cm$. Calcola il perimetro del triangolo. [$200\,cm$]

2- In un triangolo isoscele il lato obliquo misura $178\,cm$ ed il perimetro $512\,cm$. Calcola la misura della base del triangolo e la sua area. [$156\,cm$; $12480\,cm^2$].

3- In un triangolo isoscele il cui perimetro è $392\,cm$. la base misura $132\,cm$. Calcola l'area del triangolo. [$7392\,cm^2$].

4- In un triangolo isoscele la base e l'altezza sono una i $\frac{16}{15}$ dell'altra e la differenza delle loro misure vale $11\,cm$. Calcola il perimetro e l'area del triangolo isoscele. [$550\,cm$; $14520\,cm^2$]

5 In un rettangolo la misura delle dimensioni è $17\,cm$ e $144\,cm$. Calcola la misura del perimetro, dell'area e della diagonale del rettangolo. [$322\,cm$; $2448\,cm^2$; $145\,cm$]

6- In un rettangolo la diagonale misura $4,1\,m$ e l'altezza $0,9\,m$. Calcola le misure del perimetro e dell'area del rettangolo. [$9,8\,m$; $3,6\,m^2$]

7- Un appezzamento di terreno ha forma di un rettangolo di area $98280\,m^2$ e base $351\,m$. Calcola la misura del perimetro e della diagonale del rettangolo. [$1262\,m$; $449\,m$]

8- In un rettangolo la base e la diagonale misurano rispettivamente $7,7\,cm$ e $8,5\,cm$. Calcola il perimetro e l'area del rettangolo. [$22,6\,cm$; $27,72\,cm^2$]

9- In un rettangolo la diagonale misura 4,1 m e l'altezza 0,9 m. Calcola le misure del perimetro e dell'area del rettangolo. [$9,8\,m$; $3,6\,m^2$]

10- Un triangolo rettangolo è equivalente ad un rettangolo avente le due dimensioni lunghe $7,2\,cm$ e $4\,cm$. Calcola il perimetro del triangolo sapendo che un suo cateto misura $16\,cm$. [$36\,cm$]

11- Le diagonali di una aiuola a forma di rombo misurano 19,2 m e 14,4 m rispettivamente. Calcola l'area e il perimetro dell'aiuola. [$138,24\,m^2; 48\,m$]

12- Il perimetro di un rombo misura $360\,cm$ e la diagonale minore è di $108\,cm$ Quanto vale la superficie del rombo? [$7776\,cm^2$].

13- Il perimetro di un rombo misura $26\,cm$ e una diagonale di $6,6\,cm$. Quanto vale l'area del rombo? [$36,96\,cm^2$]

14- Un rombo, avente area di 1080 m^2, ha una diagonale di misura 30 m. Calcola il perimetro del rombo. [$156\,cm$]

15 - In un rombo, la somma delle lunghezze delle diagonali misura 294 cm ed una diagonale è i $\frac{4}{3}$ dell'altra. Calcola perimetro, area e altezza del rombo. [420cm; $10584\,cm^2$; $100,8\,cm$].

16- In un trapezio rettangolo le basi e l'altezza misurano rispettivamente $26\,cm$, $86\,cm$ e $80\,cm$. Calcola area e perimetro del trapezio. [$4480\,cm^2; 292\,cm$]

Indice

1 Numeri naturali e proprietà delle potenze **1**

2 Scomposizioni in fattori, MCD e mcm **4**
2.1 Scomposizione in fattori 4
2.2 M.C.D e m.c.m. 4

3 L'insieme dei razionali assoluti **6**
3.1 Numeri decimali e frazioni 7

4 L'insieme dei razionali relativi **8**

5 Espressioni letterali ed equazioni **10**
5.1 Espressioni letterali 10
5.2 Equazioni 12

6 Relazioni fra grandezze, proporzionalità diretta ed inversa **16**
6.1 Proporzioni 16
6.2 Proporzionalità diretta ed inversa fra grandezze 19

7 Teorema di Pitagora **23**