

Liceo Scientifico Statale "Enrico Fermi"

Prova Comune di Matematica, classi QUINTE – Anno Scolastico 2022/2023

Classe : 5 _____ Nome e Cognome: _____ Data _____

NON usare penna cancellabile o bianchetto.

Quesito 1

E' data la funzione:

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1) \quad \text{dove } \ln x = \log_e x$$

- a. Dopo aver individuato il dominio di $f(x)$ e semplificato opportunamente la funzione, traccia il grafico di $y = f(x)$ deducendolo dal grafico $y = \ln x$; chiarisci quali trasformazioni hai utilizzato sia riportandole graficamente sia spiegandole a parole (ricorda di tracciare gli eventuali asintoti delle funzioni).
- b. Scrivi l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$f(x) \leq \ln(x + 1) + \ln(x^2 - x)$$

$$] - 1; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; \infty[$$

- c. dopo aver motivato perché la funzione $g(x) = \ln(x + 1)$ è invertibile, traccia il grafico della funzione inversa $y = h(x) = g^{-1}(x)$ in un nuovo piano cartesiano e deduci l'espressione analitica della funzione inversa fornendo il suo dominio, l'equazione dell'asintoto e l'insieme immagine.

Quesito 2

Considera la parola DIVERTIRSI.

- a. Quanti sono i suoi anagrammi, anche privi di significato?
- b. Quanti sono i suoi anagrammi che iniziano con la lettera E?
- c. Quanti sono i suoi anagrammi che iniziano con una vocale?
- d. Considerato l'insieme X formato dalle lettere distinte da cui è composta la parola DIVERTIRSI, quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi di X?
- e. Quanti sono complessivamente i sottoinsiemi (propri o impropri) di X?

a) 302400

b) 30240

c) 120960

d) 35

e) 128

Quesito 3

Data la funzione di equazione $f(x) = 2 \cos(x - \pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

- semplifica la sua espressione;
- determina a e b in modo che il grafico della funzione $g(x) = a + b \sin x$ passi per i punti del grafico di $y = f(x)$ di ascisse $\frac{\pi}{3}$ e 0 ;
- Posti $a = -1$ e $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$, traccia il grafico della funzione di equazione

$y = h(x) = -\cos x + \sqrt{3}g(x) + \sqrt{3}$
deducendolo dal grafico di $y = \sin x$

- Dimostra che la disequazione $h^2(x) > 1$ è equivalente alla disequazione $\tan x < 0$.

La disequazione $h^2(x) \geq 1$ è equivalente alla disequazione $\tan x \leq 0$?

$$[f(x) = -\cos x]$$

$$a = -1; b = \sqrt{3}/3$$

$$h(x) = -\cos x + \sin x$$

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

No, per le CE della tangente]

Quesito 4

Data la funzione

$$f(x) = \frac{3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3}{3^{x+1} - 9^x}$$

- determina il dominio;
- trova gli eventuali zeri;
- studia il segno e trova le regioni del piano in cui giace la funzione;
- Determina il dominio della funzione $g(x) = \frac{1}{\log(f(x))}$.

$$\mathbb{R} - \{1\}$$

$x = 1$ non acc; $x = -1$

$$f(x) = \frac{1-3 \cdot 3^x}{3^x} = 3^{-x} - 3 \text{ è positiva per } x < -1$$

$$\mathcal{D}(g) =] - \infty; -1[\setminus \{-\log_3 4\}$$

Quesito 5

E' dato il triangolo ABC con $\overline{AB} = 3(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, $\overline{AC} = 6\sqrt{2}$ e $\widehat{CAB} = \alpha = \frac{\pi}{3}$.

- Determina i valori esatti (non approssimati) di \overline{BC} . $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$, $(\widehat{CBA} = \frac{\pi}{4})$.
- Dopo aver trovato che $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$, determina il valore esatto di $\sin(\widehat{ACB})$. $\sin \widehat{ACB} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $(\widehat{ACB} = \frac{5}{12}\pi)$
- Conduci, esternamente al triangolo ABC , una semiretta di origine C che forma con il lato BC un angolo congruente a \widehat{ACB} ; sulla semiretta si prendi il punto H tale che $\overline{CH} = 6\sqrt{2}$. Determina \overline{AH} e approssima il risultato a due cifre decimali.

$$12\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 4,39$$