

**Liceo Scientifico Statale “Enrico Fermi”**

**Prova Comune di Matematica, classi QUINTE – Anno Scolastico 2022/2023**

**Classe : 5 \_\_\_\_\_ Nome e Cognome: \_\_\_\_\_ Data \_\_\_\_\_**

**NON** usare penna cancellabile o bianchetto.

**Quesito 1**

E' data la funzione:

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1) \quad \text{dove } \ln x = \log_e x$$

- a. Dopo aver individuato il dominio di  $f(x)$  e semplificato opportunamente la funzione, traccia il grafico di  $y = f(x)$  deducendolo dal grafico  $y = \ln x$ ; chiarisci quali trasformazioni hai utilizzato sia riportandole graficamente sia spiegandole a parole (ricorda di tracciare gli eventuali asintoti delle funzioni).
- b. Scrivi l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$f(x) \leq \ln(x + 1) + \ln(x^2 - x)$$

$$] - 1; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; \infty[$$

- c. dopo aver motivato perché la funzione  $g(x) = \ln(x + 1)$  è invertibile, traccia il grafico della funzione inversa  $y = h(x) = g^{-1}(x)$  in un nuovo piano cartesiano e deduci l'espressione analitica della funzione inversa fornendo il suo dominio, l'equazione dell'asintoto e l'insieme immagine.

**Quesito 2**

Considera la parola DIVERTIRSI.

- a. Quanti sono i suoi anagrammi, anche privi di significato?
- b. Quanti sono i suoi anagrammi che iniziano con la lettera E?
- c. Quanti sono i suoi anagrammi che iniziano con una vocale?
- d. Considerato l'insieme X formato dalle lettere distinte da cui è composta la parola DIVERTIRSI, quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi di X?
- e. Quanti sono complessivamente i sottoinsiemi (propri o impropri) di X?

a) 302400

b) 30240

c) 120960

d) 35

e) 128

### Quesito 3

Data la funzione di equazione  $f(x) = 2 \cos(x - \pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

- semplifica la sua espressione;
- determina  $a$  e  $b$  in modo che il grafico della funzione  $g(x) = a + b \sin x$  passi per i punti del grafico di  $y = f(x)$  di ascisse  $\frac{\pi}{3}$  e  $0$ ;
- Posti  $a = -1$  e  $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , traccia il grafico della funzione di equazione

$y = h(x) = -\cos x + \sqrt{3}g(x) + \sqrt{3}$   
deducendolo dal grafico di  $y = \sin x$

- Dimostra che la disequazione  $h^2(x) > 1$  è equivalente alla disequazione  $\tan x < 0$ .

La disequazione  $h^2(x) \geq 1$  è equivalente alla disequazione  $\tan x \leq 0$ ?

$$[f(x) = -\cos x]$$

$$a = -1; b = \sqrt{3}/3$$

$$h(x) = -\cos x + \sin x$$

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

No, per le CE della tangente]

### Quesito 4

Data la funzione

$$f(x) = \frac{3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3}{3^{x+1} - 9^x}$$

- determina il dominio;
- trova gli eventuali zeri;
- studia il segno e trova le regioni del piano in cui giace la funzione;
- Determina il dominio della funzione  $g(x) = \frac{1}{\log(f(x))}$ .

$$\mathbb{R} - \{1\}$$

$x = 1$  non acc;  $x = -1$

$$f(x) = \frac{1-3 \cdot 3^x}{3^x} = 3^{-x} - 3 \text{ è positiva per } x < -1$$

$$\mathcal{D}(g) = ] - \infty; -1[ \setminus \{-\log_3 4\}$$

### Quesito 5

E' dato il triangolo  $ABC$  con  $\overline{AB} = 3(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ ,  $\overline{AC} = 6\sqrt{2}$  e  $\widehat{CAB} = \alpha = \frac{\pi}{3}$ .

- Determina i valori esatti (non approssimati) di  $\overline{BC}$ .  $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$ ,  $(\widehat{CBA} = \frac{\pi}{4})$ .
- Dopo aver trovato che  $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$ , determina il valore esatto di  $\sin(\widehat{ACB})$ .  $\sin \widehat{ACB} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ,  $(\widehat{ACB} = \frac{5}{12}\pi)$
- Conduci, esternamente al triangolo  $ABC$ , una semiretta di origine  $C$  che forma con il lato  $BC$  un angolo congruente a  $\widehat{ACB}$ ; sulla semiretta si prendi il punto  $H$  tale che  $\overline{CH} = 6\sqrt{2}$ . Determina  $\overline{AH}$  e approssima il risultato a due cifre decimali.

$$12\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 4,39$$