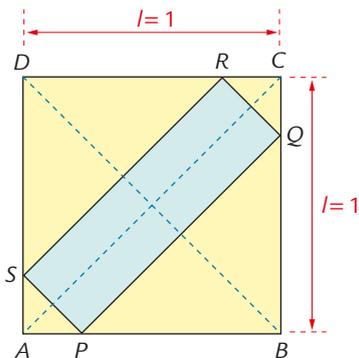


1.

>>>

Esercizi di ripasso sui problemi di massimo e di minimo: problemi di secondo grado

1 Tra i rettangoli inscritti in un quadrato di lato unitario, aventi i lati paralleli alle diagonali del quadrato, determina quello di area massima.



[Ponendo $\overline{AP} = x$, si trova che l'area del rettangolo è espressa dalla funzione $A(x) = -2x^2 + 2x$;

l'area è massima per $x = \frac{1}{2}$, cioè quando il rettangolo coincide con il quadrato inscritto in $ABCD$ avente i lati paralleli alle diagonali]

2 Considera un triangolo rettangolo isoscele ABC i cui cateti AB e AC misurano a . Sia P un punto sul cateto AC , Q la proiezione di P su BC ed R la proiezione di Q su AB . Determina P in modo che l'area del trapezio $APQR$ sia massima.

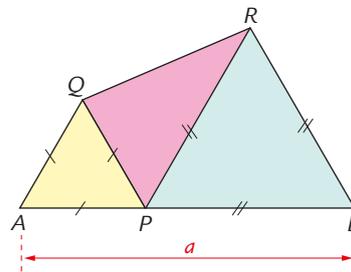
[Ponendo $\overline{AP} = x$, si trova che l'area del trapezio è espressa dalla funzione $A(x) = \frac{1}{8}(-3x^2 + 2ax + a^2)$;
l'area è massima per $x = \frac{a}{3}$]

3 Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e la retta r di equazione $y = x + 4$, determina il punto P della parabola che ha distanza minima dalla retta r . $\left[P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right) \right]$

4 È dato un parallelogramma $ABCD$, in cui $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 4$ e $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Siano P, Q, R ed S quattro punti, appartenenti rispettivamente ai lati AB, BC, CD e AD , tali che $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS} = x$. Determina x in modo che l'area del parallelogramma $PQRS$ sia minima, specificando qual è il valore minimo di tale area.

[L'area del parallelogramma $PQRS$ vale $x^2 - 6x + 16$ ed è minima per $x = 3$; il valore minimo dell'area è 7]

5 In riferimento alla figura, il segmento AB misura a e i triangoli APQ e PBR sono equilateri. Verifica che l'area del quadrilatero $ABRQ$ è minima se e solo se il perimetro di $ABRQ$ è minimo. In tal caso, come risulta il quadrilatero $ABRQ$?



[Posto $\overline{AP} = x$, l'area del quadrilatero $ABRQ$ è espressa dalla funzione $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - ax + a^2)$ e il perimetro dalla funzione $P(x) = 2a + \sqrt{3x^2 - 3ax + a^2}$; si trova che sia il minimo dell'area sia il minimo del perimetro corrispondono alla posizione in cui P è il punto medio di AB ; in tal caso il quadrilatero è un trapezio isoscele]

6 Considera un triangolo ABC in cui $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 6$ e $\overline{AC} = 2\sqrt{7}$.

- Determina $\cos(\widehat{ABC})$ e deduci l'ampiezza di \widehat{ABC} .
- Determina il punto P , appartenente a BC , per cui è minima la somma $\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2$. [a. $\widehat{ABC} = 60^\circ$;
b. posto $\overline{PB} = x$, si trova $\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = 2x^2 - 4x + 16$; il minimo si ottiene per $x = 1$]

Esercizi di ripasso sui problemi di massimo e di minimo: problemi risolvibili per via trigonometrica

7 È dato un settore circolare AOB , di centro O , raggio 1 e ampiezza 90° . Sul prolungamento di OA , dalla parte di A , considera il punto C tale che $\overline{OA} = \overline{AC}$. Indicato con P un punto sull'arco \widehat{AB} , determina P in modo che la somma $2\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ sia minima.

[Ponendo $\widehat{AOP} = x$, si trova $2\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 9 - 4\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; minimo per $x = \frac{\pi}{4}$]

8 Sia ABC un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r . Traccia una corda PQ , parallela ad AB , con P appartenente al minore dei due archi \widehat{AC} e Q appartenente al minore dei due archi \widehat{BC} . Determina $\widehat{ACP} = x$ in modo che il perimetro del pentagono $APCQB$ sia massimo.

[Il perimetro del pentagono è espresso dalla funzione $P(x) = r\sqrt{3} + 4r \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; il massimo si ottiene per $x = \frac{\pi}{6}$]

9 Sia $ABCD$ un quadrato di lato a . Traccia la semicirconferenza di diametro BC interna al quadrato e determina su tale circonferenza il punto P tale che la somma dei quadrati delle distanze di P dai vertici del quadrato sia minima.

[Ponendo $\widehat{BCP} = x$, si trova $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 4a^2 - 2a^2 \sin 2x$; minimo per $x = \frac{\pi}{4}$]

10 Considera un settore circolare AOB , di centro O e raggio 1, di ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Sia P un punto sull'arco \widehat{AB} tale che $\widehat{AOP} = x$ e $PQRS$ il rettangolo inscritto nel settore, avente il vertice Q sul raggio OB e il lato RS sul raggio OA . Determina x in modo che sia massima l'area del rettangolo $PQRS$.

[L'area, espressa in funzione di x , vale $\frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}$ ed è massima per $x = \frac{\pi}{6}$]

11 Considera una semicirconferenza di diametro AB e raggio 1. Tra i quadrilateri $ABCD$ inscritti nella semicirconferenza, aventi il lato CD congruente al raggio della semicirconferenza stessa, determina:

- quello di perimetro massimo;
- quello di area massima.

[Ponendo $\widehat{ABD} = x$, si trova che la funzione che esprime il perimetro del quadrilatero è $P(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$, il perimetro è massimo quando $x = \frac{\pi}{6}$; la funzione

che esprime l'area del quadrilatero è $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$, anche l'area è massima quando $x = \frac{\pi}{6}$]

12 Dato un quadrato $ABCD$ di lato 1, traccia una retta passante per B che non interseca il quadrato in alcun punto oltre a B . Dette A' e C' le proiezioni di A e C sulla retta, determina la posizione della retta in modo che la somma $\overline{A'C}^2 + \overline{C'D}^2$ sia massima.

[Indicato con x l'angolo formato dalla semiretta BA e dalla semiretta BA' , si trova che $\overline{A'C}^2 + \overline{C'D}^2 = 3 + \sqrt{5} \sin(2x + \alpha)$, essendo $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$; massimo per $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$]

Esercizi di ripasso sulle rette tangenti

13 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 4$ passanti per l'origine.

$$[y = -6x, y = 2x]$$

14 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione $y = 2x^2 + x - 3$ nei suoi punti di intersezione con l'asse x .

$$[y = -5x - \frac{15}{2}, y = 5x - 5]$$

15 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ nei suoi punti di intersezione con l'asse x .

$$[y = x - 1, y = 3 - x]$$

16 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x = 0$, parallele alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

$$[y = x - 3 \pm 3\sqrt{2}]$$

17 Determina le equazioni delle rette tangenti all'ellisse di equazione $9x^2 + 4y^2 = 36$, passanti per il punto $P(2, 4)$.

$$[x = 2, y = \frac{7}{16}x + \frac{25}{8}]$$

18 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti e passante per $P(2, 3)$. Determina l'equazione della retta tangente all'iperbole in P .

$$[y = -\frac{3}{2}x + 6]$$

19 Determina le equazioni delle rette tangenti comuni alla parabola di equazione $y = x^2 + 1$ e alla sua simmetrica rispetto al punto $P(2, 4)$.

[Simmetrica: $y = -x^2 + 8x - 9$,
tangenti comuni: $y = 2x, y = 6x - 8$]

20 Determina l'equazione della retta tangente sia alla parabola di equazione $y = x^2$ sia alla parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 4$.

$$[y = 3x - \frac{9}{4}]$$

21 Determina le equazioni delle rette tangenti sia alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x = 0$, sia alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

$$[y = \pm 2; y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}(x - 1)]$$