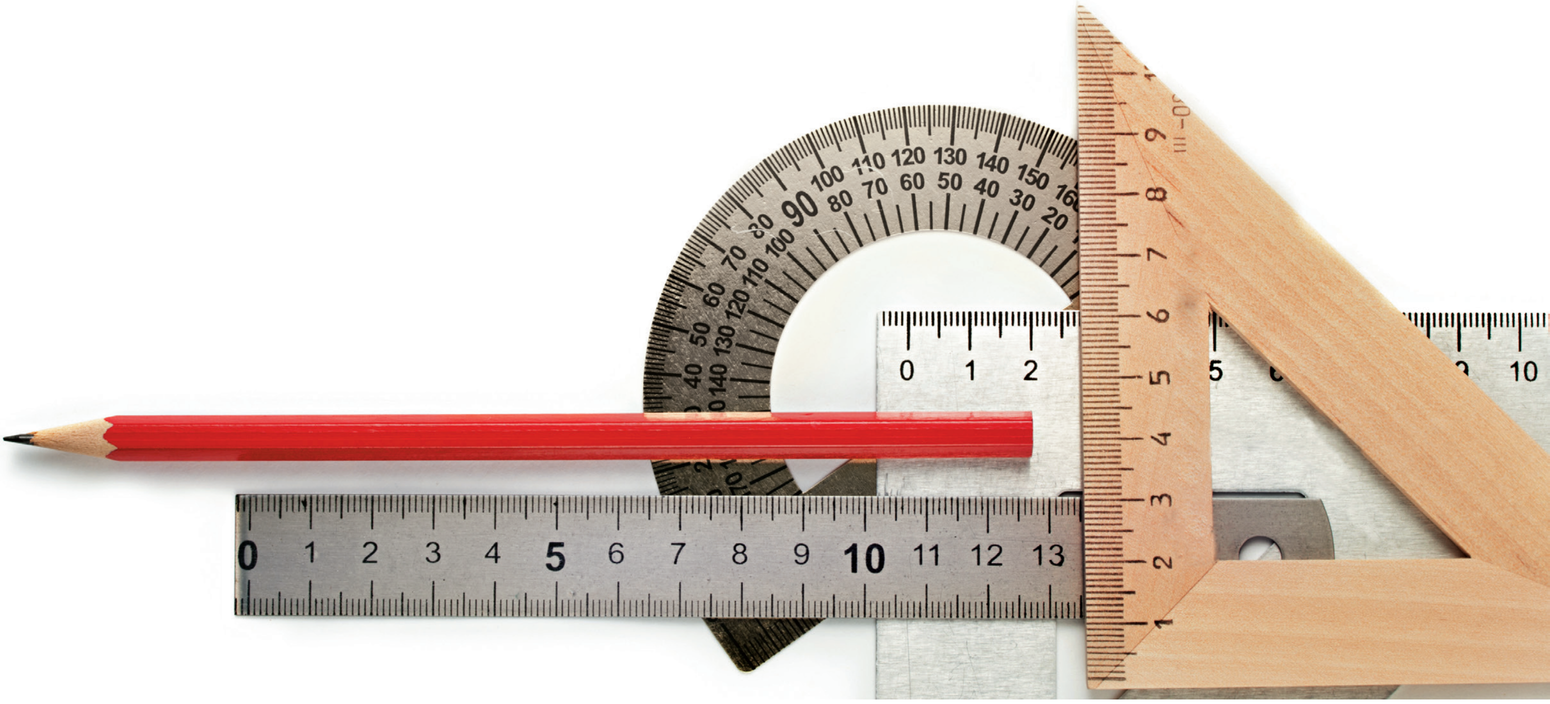
STRUMENTI MATEMATICI



1. I RAPPORTI

- In una scuola ci sono 300 studenti e 60 computer. In media, ci sono

$$300 : 60 = \frac{300}{60} = 5 \text{ studenti per ogni computer.}$$

- 3 kg di pane costano 7,5 euro. Il prezzo del pane è

$$7{,}5 \text{ euro} : 3 \text{ kg} = \frac{7{,}5 \text{ euro}}{3 \text{ kg}} = 2{,}5 \frac{\text{euro}}{\text{kg}} \text{ cioè 2,5 euro per ogni kilogrammo.}$$

Un **rapporto** dà un'informazione relativa a un'unità e permette quindi di ricavare il valore unitario di una grandezza.

A Il rapporto studenti/computer dice quanti studenti condividono *un* computer.

B Il prezzo del pane (rapporto prezzo/massa) è il prezzo di *un* kilogrammo di pane.

Un rapporto può essere espresso sotto forma di frazione:

$$a : b = \frac{a}{b}$$

numeratore

denominatore

Come varia un rapporto

Tenendo fisso il denominatore, se il numeratore aumenta, il rapporto aumenta.

$$\frac{a\uparrow}{b} = r\uparrow$$

Per esempio, teniamo fisso il denominatore (10) e aumentiamo il numeratore:

$$\frac{60}{10} = 6 \quad \frac{80}{10} = 8 \quad \frac{100}{10} = 10.$$

Tenendo fisso il numeratore, se il denominatore aumenta, il rapporto diminuisce.

$$\frac{a}{b\uparrow} = r\downarrow$$

Per esempio, teniamo fisso il numeratore (60) e aumentiamo il denominatore:

$$\frac{60}{2} = 30 \quad \frac{60}{5} = 12 \quad \frac{60}{10} = 6.$$

2. LE PROPORZIONI

Una **proporzione** è un'uguaglianza di rapporti.

medi

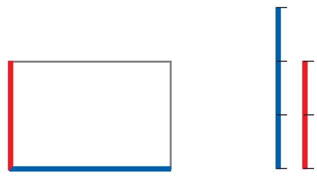
$$3 : 2 = 6 : 4 \quad \text{oppure} \quad \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

estremi

Entrambi i rapporti sono uguali a 1,5.

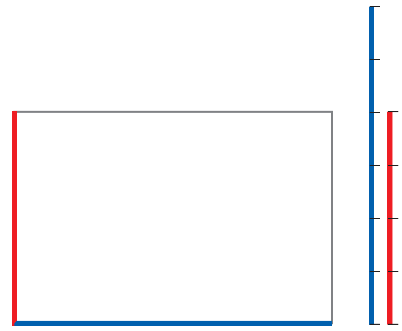
A 3 e 2 sono i lati di un rettangolo. Il loro rapporto è:

$$3:2 = 1,5$$



B 6 e 4 sono i lati di un rettangolo simile. Anche il loro rapporto è:

$$6:4 = 1,5$$



- Se l'incognita x è un medio, il suo valore è uguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio:

$$6:4 = x:10 \qquad \left(\text{cioè } \frac{6}{4} = \frac{x}{10}\right) \qquad x = \frac{6 \times 10}{4}.$$

- Se l'incognita x è un estremo, il suo valore è uguale al prodotto dei medi diviso per l'altro estremo:

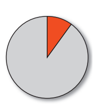
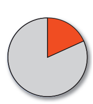
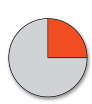
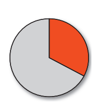
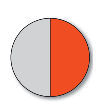
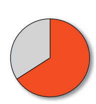
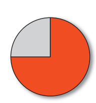
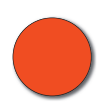
$$9:3 = 6:x \qquad \left(\text{cioè } \frac{9}{3} = \frac{6}{x}\right) \qquad x = \frac{3 \times 6}{9}.$$

3. LE PERCENTUALI

La **percentuale** è un rapporto che ha come denominatore 100.

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25.$$

Il simbolo % significa «fratto 100», cioè «diviso per 100».

PERCENTUALE	10%	2	25%	33,$\bar{3}$%	50%	66,$\bar{6}$%	75%	100%
NUMERO DECIMALE	0,1	0,2	0,25	0,33…	0,5	0,66…	0,75	1
FRAZIONE	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$
GRAFICO A TORTA								

- **Quanto vale la percentuale di un numero dato**. Il 30% di 1200 è

$$\frac{30}{100} \times 1200 = 360.$$

La preposizione *di* indica una moltiplicazione.

- **Quanto vale in percentuale un numero rispetto a un altro**. In una classe di 25 persone 20 hanno il telefonino. Quanti ragazzi in percentuale hanno il telefonino?

$$20:25 = x:100$$

$$x = \frac{20 \times 100}{25} = 80 \qquad \Rightarrow \qquad 80\%.$$

- **Quanto vale un numero di cui si conosce il valore di una sua percentuale**. Quest'anno sono caduti 40 mm di pioggia, che sono l'80% rispetto a un anno fa. Quanti mm di pioggia sono caduti l'anno scorso?

$$40:x = 80:100$$

$$x = \frac{40 \times 100}{80} = 50 \qquad \Rightarrow \qquad 50\,\text{mm}\,.$$

Aumento in percentuale

- C'erano 20 studenti, che poi sono aumentati del 10%. Sono diventati

$$\boxed{\underbrace{20}_{\text{prima}} + \overbrace{\frac{10}{100} \times 20}^{\text{aumento del 10\%}} = 20 + 2 = \underbrace{22}_{\text{dopo}}}$$

Quindi l'aumento è stato di 2 studenti.

- C'erano 20 studenti, che poi sono aumentati del 100%. Sono diventati

$$20 + \frac{100}{100} \times 20 = 40.$$

Se una quantità aumenta del 100%, raddoppia; del 200%, triplica…

Diminuzione in percentuale

- C'erano 20 studenti, che poi sono diminuiti del 10%. Sono diventati

$$\boxed{\underbrace{20}_{\text{prima}} - \underbrace{\frac{10}{100} \times 20}_{\text{diminuzione del 10\%}} = \underbrace{18}_{\text{dopo}}}$$

Quindi la diminuzione è stata di 2 studenti.

- C'erano 20 studenti, che poi sono diminuiti del 100%. Sono diventati

$$20 - \frac{100}{100} \times 20 = 0.$$

Se una quantità diminuisce del 100%, diventa zero.

Una quantità positiva, come il numero degli studenti, non può diminuire più del 100%. Quindi non ha senso dire che il numero dei delitti compiuti in un anno è diminuito del 200%.

4. I GRAFICI

Un grafico rappresenta in modo visivo una relazione tra due grandezze. Per costruire un grafico si può partire da una tabella o da una formula.

Dalla tabella al grafico

La **tabella** seguente riporta i valori della temperatura in funzione del tempo.

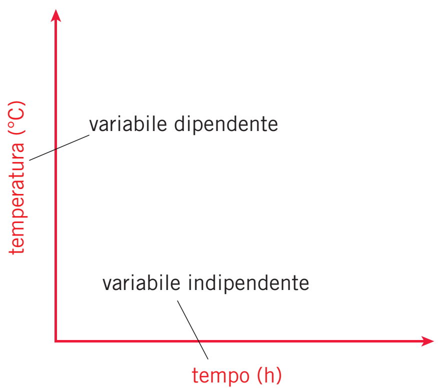
grandezza

unità di misura

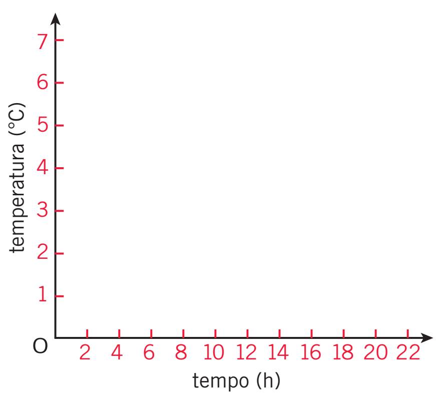
intestazione

TEMPO (h)	TEMPERATURA (°C)
0	4
2	3
4	3
6	2
8	1
10	2
12	6
14	7
16	6
18	6
20	5
22	4

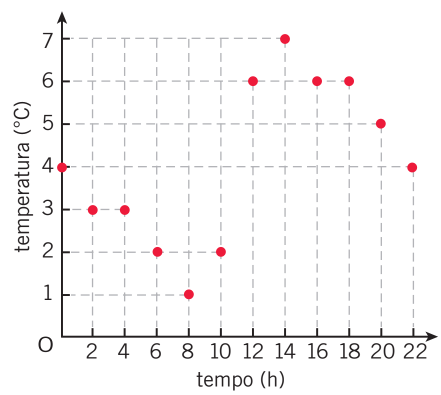
A Per costruire il grafico: si tracciano gli assi e per ciascuno si scrivono grandezza e unità di misura;



B si scelgono, a seconda dei dati, la scala sull'asse orizzontale e quella sull'asse verticale;



C si riportano nel piano cartesiano le coppie di valori: ciascuna di esse individua un punto.



L'asse orizzontale (asse delle *ascisse*) rappresenta la variabile *indipendente*, quello verticale (asse delle *ordinate*) la variabile *dipendente*.

La scala si sceglie in modo da distribuire i dati sullo spazio a disposizione:

- un'unità in orizzontale → 2 h, cioè 2 ore (scala orizzontale);
- un'unità in verticale → 1 °C, cioè un grado Celsius (scala verticale).

Le tacche sugli assi sono in corrispondenza a numeri semplici:

2, 4, 6... in orizzontale;

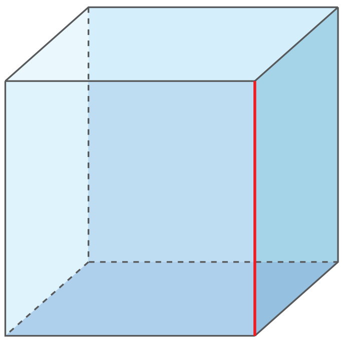
1, 2, 3... in verticale.

Dalla formula al grafico

Una tabella contiene un numero finito di dati. Per esempio, la tabella sotto ha 4 coppie di dati. Una formula permette invece di raccogliere una quantità di dati infinita.

A Data la **formula** del volume del cubo:

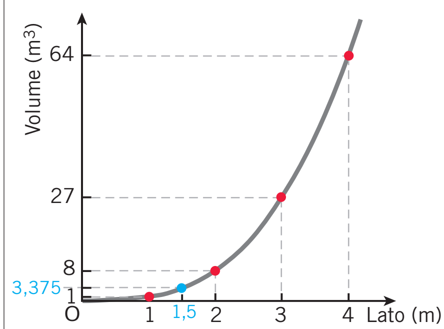
$$V = l^3,$$



B costruiamo una delle possibili **tabelle**, assegnando al lato i valori 1, 2, 3… metri.

Lato (m)	Volume (m^3)
1	1
2	8
3	27
4	64

C Rappresentiamo i dati della tabella in un **grafico** e congiungiamo con una linea continua i punti.



Partendo dalla formula, possiamo controllare che la linea tracciata passi davvero per i punti individuati.

Per esempio, al lato 1,5 m corrisponde il volume (1,5 m) × (1,5 m) × (1,5 m) = 3,375 m^3; quindi il grafico deve passare molto vicino al punto (1,5; 3,375). Altrimenti, dobbiamo correggere la curva.

5. LA PROPORZIONALITÀ DIRETTA

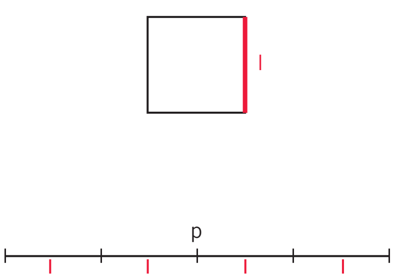
Due grandezze x e y sono **direttamente proporzionali** se:

- quando x raddoppia, y raddoppia;
- quando x triplica, y triplica…

In un quadrato il perimetro è direttamente proporzionale al lato.

A Il perimetro del quadrato è 4 volte il lato:

$$p = 4\,l$$

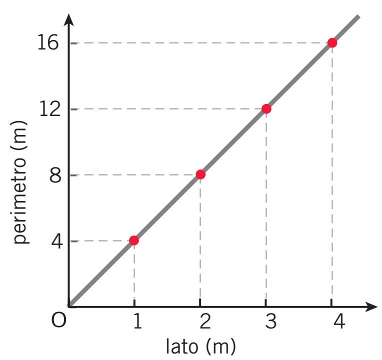


B Raddoppiando il lato, il perimetro raddoppia; triplicando il lato, il perimetro triplica…

Lato (m)	Perimetro (m)
1	1
2	8
3	27
4	64

×2 ×3

C Il grafico del perimetro in funzione del lato è una retta che passa per l'origine.



In ogni quadrato il rapporto tra il perimetro e il lato è costante, perché è sempre uguale a 4:

$$\frac{p}{l} = 4.$$

Per due grandezze x e y **direttamente proporzionali** valgono le seguenti proprietà:

- la formula che le lega ha la forma:

$$y = k\,x$$

- il loro rapporto è costante:

$$\frac{y}{x} = k$$

- il grafico è una retta che passa per l'origine.

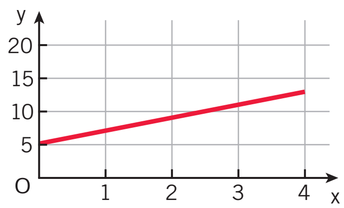
La massa e il volume di una sostanza sono direttamente proporzionali: la massa di due cucchiai di zucchero è il doppio della massa di un cucchiaio… Il rapporto tra la massa e il volume è costante ed è uguale alla densità:

$$\frac{m}{V} = d.$$

La dipendenza lineare

Due grandezze x e y sono linearmente dipendenti quando sono legate dalla formula

$$y = k\,x + q$$



dove k e q sono costanti. Per esempio, se $k = 2$ e $q = 5$,

$$y = 2x + 5.$$

Il grafico a sinistra è una retta che passa per il punto (0, 5).

Il grafico di due grandezze linearmente dipendenti è una retta.

Quando $q = 0$, x e y sono direttamente proporzionali. Quindi la proporzionalità diretta è un caso particolare di dipendenza lineare.

6. LA PROPORZIONALITÀ INVERSA

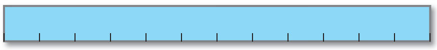
Due grandezze x e y sono **inversamente proporzionali** se:

- quando x raddoppia, y diventa la metà;
- quando x triplica, y diventa un terzo…

La base e l'altezza di rettangoli che hanno la stessa area sono inversamente proporzionali. Consideriamo i rettangoli che hanno l'area di 12 cm^2. Ce ne sono infiniti. Per esempio:

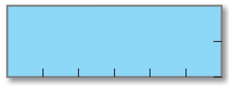
A base: 12 cm altezza: 1 cm

$$12 \times 1 = 12,$$



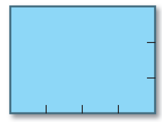
B base: 6 cm altezza: 2 cm

$$6 \times 2 = 12,$$



C base: 4 cm altezza: 3 cm

$$4 \times 3 = 12.$$



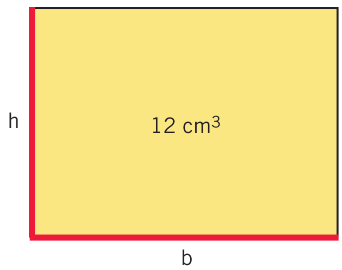
Dalla formula dell'area del rettangolo

$$A = b\,h$$

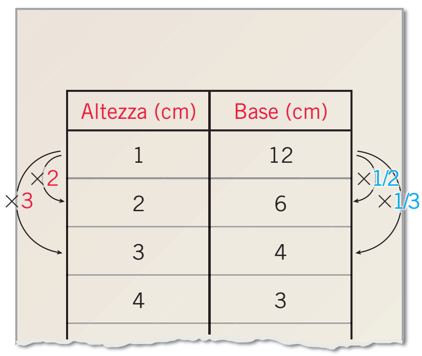
ricaviamo la formula che dà la base in funzione dell'altezza.

A La base è uguale all'area diviso l'altezza:

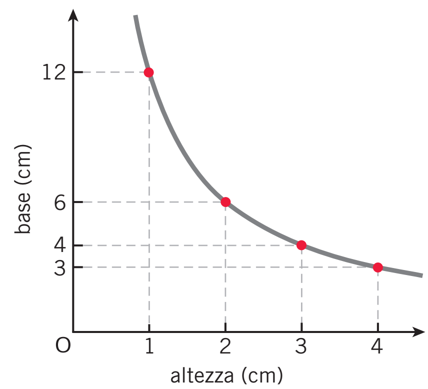
$$b = \frac{12\ \text{cm}^2}{h}.$$



B Raddoppiando l'altezza, la base diventa metà; triplicando l'altezza, la base diventa un terzo…



C Il grafico della base in funzione dell'altezza è un arco di iperbole equilatera.



In tutti i rettangoli che hanno la stessa area il prodotto tra la base e l'altezza è costante. Nell'esempio, il prodotto è:

$$b\,h = 12\ \text{cm}^2$$

Per due grandezze x e y **inversamente proporzionali** valgono le seguenti proprietà:

- la formula che le lega ha la forma

$$y = \frac{k}{x}$$

- il loro prodotto è costante:

$$xy = k$$

- il grafico è un ramo di iperbole.

La velocità è inversamente proporzionale al tempo nel quale si percorre una determinata distanza. Per esempio, un'automobile che percorre 120 km in 2 h ha una velocità media di 60 km/h. Se impiega:

- 4 ore (il doppio), la velocità è 30 km/h (la metà);
- 6 ore (il triplo), la velocità è 20 km/h (un terzo).

7. LA PROPORZIONALITÀ QUADRATICA DIRETTA E INVERSA

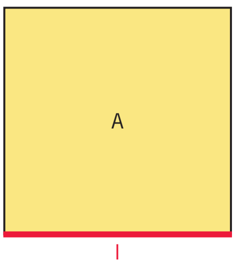
Una grandezza y è **direttamente proporzionale al quadrato** di una grandezza x se:

- quando x raddoppia, y diventa quattro volte più grande;
- quando x triplica, y diventa nove volte più grande…

In un quadrato l'area è direttamente proporzionale al quadrato del lato.

A L'area del quadrato è uguale al prodotto del lato per se stesso:

$$A = l^2.$$

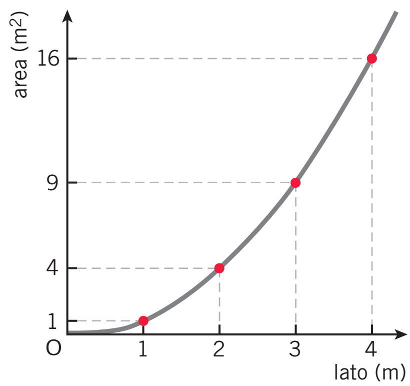


B Raddoppiando il lato, l'area diventa 4 volte più grande; triplicando il lato, l'area diventa 9 volte più grande…

Lato (m)	Area (m^2)
1	1
2	4
3	9
4	16

$\times 2$ $\times 3$ → $\times 2^2$ $\times 3^2$

C Il grafico dell'area del quadrato in funzione del lato è un arco di parabola.



In ogni quadrato il rapporto tra l'area e il quadrato del lato è costante, perché è sempre uguale a 1:

$$\frac{A}{l^2} = 1.$$

Quando una grandezza y è **direttamente proporzionale al quadrato** di una grandezza x, valgono le seguenti proprietà:

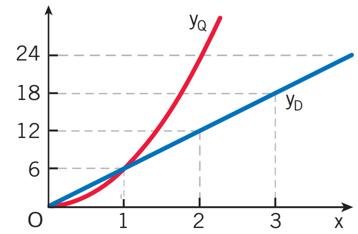
- la formula che le lega ha la forma
$$y = k\,x^2$$
- il rapporto tra y e il quadrato di x è costante:
$$\frac{y}{x^2} = k$$
- il grafico è un ramo di parabola.

Nell'esempio dell'area del quadrato, $k = 1$:

$$y = l^2.$$

Confronto tra proporzionalità diretta e quadratica

I due tipi di proporzionalità rappresentano due diversi modi di crescere: uno più lento (la proporzionalità diretta) e uno più rapido (la proporzionalità quadratica). Confrontiamo i grafici, a destra, di queste due funzioni:



$$y_D = 6x \quad (\text{diretta}) \qquad\qquad y_Q = 6x^2 \quad (\text{quadratica}).$$

- Quando x è piccola, la y quadratica è minore della y diretta.
- Quando x diventa grande, la y quadratica è molto maggiore della y diretta.
- Inoltre, la differenza tra le due aumenta al crescere di x.

La proporzionalità quadratica inversa

Una grandezza y è **inversamente proporzionale al quadrato** di una grandezza x se è costante il prodotto tra y e x^2.

L'altezza h di un cono circolare di volume V fissato è inversamente proporzionale al quadrato del raggio di base r. Infatti la formula che lega h e r è

$$\frac{1}{3}\pi h r^2 = V \Rightarrow h r^2 = \frac{3V}{\pi}.$$

In ogni cono circolare di volume fissato, il prodotto di h per r^2 è costante.

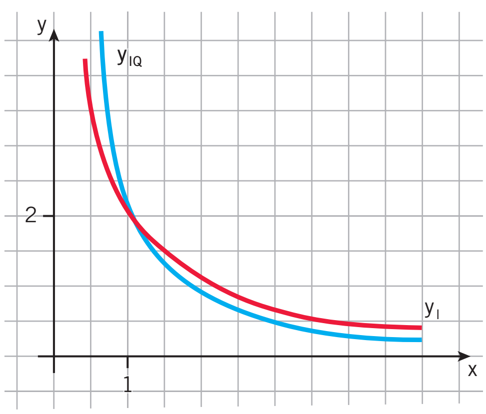
Quando una grandezza y è **inversamente proporzionale al quadrato** di una grandezza x, valgono le seguenti proprietà:

- quando x raddoppia, y diventa quattro volte più piccolo; quando x triplica, y diventa nove volte più piccolo...
- la formula che li lega ha la forma

$$y = \frac{k}{x^2}.$$

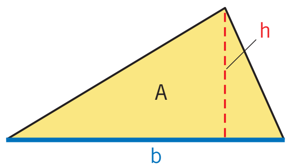
La figura sotto mostra, per confronto, i grafici delle funzioni

$$y_I = \frac{2}{x} \quad \text{e} \quad y_{IQ} = \frac{2}{x^2}.$$



- Per x abbastanza piccolo y_{IQ} rimane al di sopra di y_I.
- Per grandi valori di x y_{IQ} si avvicina allo zero più rapidamente di y_I.

8. COME SI LEGGE UNA FORMULA



Una formula è un'uguaglianza tra una grandezza (a sinistra dell'uguale) e un'espressione che contiene altre grandezze e numeri (a destra). Per esempio, la grandezza «area A di un triangolo», nella **figura** a sinistra, è uguale all'espressione «prodotto del numero $\frac{1}{2}$ per la base b e per l'altezza h»:

$$A = \frac{1}{2}bh.$$

Leggere una formula significa descrivere come varia la grandezza a sinistra dell'uguale, facendo variare una alla volta le grandezze a destra.

Proporzionalità diretta

- Teniamo fissa la base (per esempio, $b = 10$ cm) e facciamo variare l'altezza. La formula diventa

$$A = (5\ \text{cm}) \times h.$$

Poiché ha la stessa forma di $y = kx$, l'area è direttamente proporzionale all'altezza.

- Teniamo fissa l'altezza (per esempio, $h = 20$ cm) e facciamo variare la base. La formula diventa

$$A = (10\ \text{cm}) \times b.$$

Poiché ha la stessa forma di $y = kx$, l'area è direttamente proporzionale alla base.

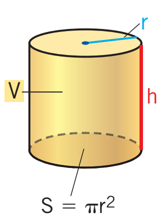
La formula

$$A = \frac{1}{2}bh$$

dice che l'area è direttamente proporzionale alla base e all'altezza.

Osserviamo che b e h compaiono a numeratore e sono elevati alla prima potenza: $b = b^1$, $h = h^1$.

Proporzionalità quadratica



Esaminiamo la formula che esprime il volume V del cilindro (**figura** a sinistra) in funzione del raggio r della base e dell'altezza h:

$$V = \pi r^2 h.$$

- Teniamo fissa l'altezza (per esempio, $h = 10$ cm) e facciamo variare la base. La formula diventa

$$V = (31{,}4\ \text{cm}) \times r^2.$$

Poiché ha la stessa forma di $y = kx^2$, il volume è direttamente proporzionale al quadrato del raggio.

La formula

$$V = \pi r^2 h$$

dice che il volume è:

- direttamente proporzionale al quadrato del raggio,
- direttamente proporzionale all'altezza.

Osserviamo che r e h compaiono a numeratore: r è elevato al quadrato (r^2) e h alla prima potenza ($h = h^1$).

Proporzionalità inversa

Esaminiamo la formula che esprime la base b di un triangolo in funzione dell'area A e dell'altezza h:

$$b = \frac{2A}{h}.$$

- Teniamo fissa l'area (per esempio, $A = 5\ \text{dm}^2$) e facciamo variare l'altezza. La formula diventa

$$b = \frac{10\ \text{dm}^2}{h}.$$

Poiché ha la stessa forma di $y = \frac{k}{x}$, la base è inversamente proporzionale all'altezza.

La formula

$$b = \frac{2A}{h}$$

dice che la base è inversamente proporzionale all'altezza e direttamente proporzionale all'area.

Osserviamo che h compare al denominatore ed è elevato alla prima potenza ($h = h^1$); A compare al numeratore ed è elevato alla prima potenza ($A = A^1$).

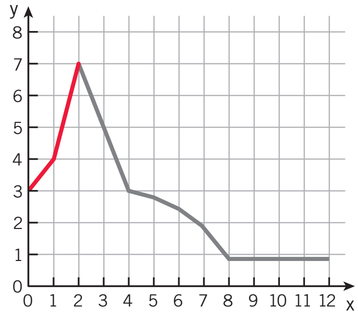
9. COME SI LEGGE UN GRAFICO

Un grafico mostra a colpo d'occhio come varia una grandezza al variare di un'altra.

Leggere un grafico significa descrivere come varia la grandezza dell'asse verticale (*variabile dipendente*), facendo variare la grandezza dell'asse orizzontale (*variabile indipendente*).

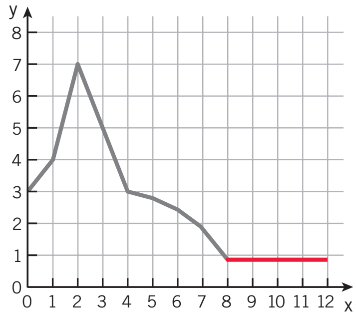
Saper leggere un grafico consente di «far parlare» i dati, individuando andamenti e linee di tendenza.

A La grandezza y aumenta quando x va da 0 a 2 e raggiunge il valore massimo per $x = 2$.



B y diminuisce, prima rapidamente (per x da 2 a 4), poi lentamente (per x da 4 a 8).

C Dal valore minimo, che raggiunge quando $x = 8$, la y resta costante per x da 8 a 12.

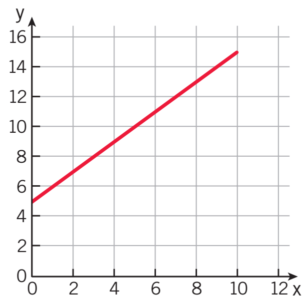


Come i grafici possono ingannare

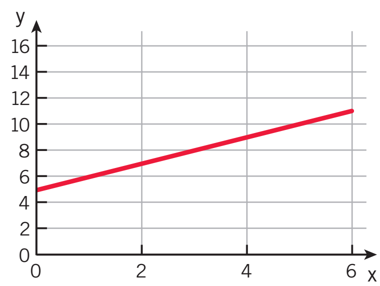
Modificando la scala, è possibile accentuare o attenuare le linee di tendenza, suggerendo una lettura in un senso o in altro del grafico.

Il cambiamento delle scale può appiattire il grafico, dando la sensazione che la variazione della y sia piccola.

A Il grafico a forma di retta mostra che la y cresce linearmente all'aumentare di x.

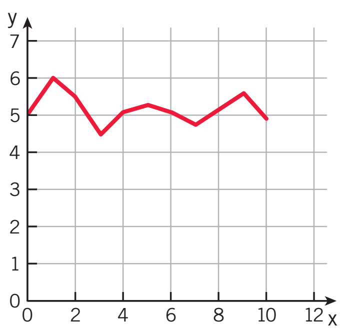


B Per dare l'impressione che la crescita sia lenta, si può dilatare la scala delle x e contrarre la scala delle y.

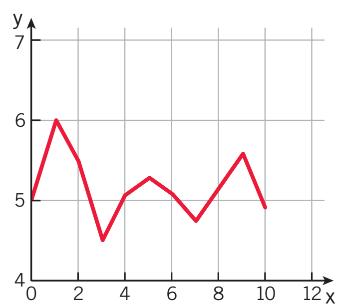


Al contrario, per suggerire che la variazione della y è grande, si contrae la scala delle x e si dilata la scala delle y. Per accentuare questa interpretazione, si può anche eliminare un pezzo di asse y, come spesso fanno i giornali.

A Il grafico mostra una piccola oscillazione dell'ordinata intorno al valore 5.



B Se si taglia il segmento da $y = 0$ a $y = 4$ e si dilata la scala delle y, si accentua l'oscillazione.



Per leggere in modo corretto un grafico bisogna guardare con attenzione le scale di entrambi gli assi e le loro unità di misura.

10. LE POTENZE DI 10

- Se l'esponente è positivo, si ha $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ volte}}$
  Per esempio,

$$10^2 = \underbrace{10 \times 10}_{2 \text{ volte}}, \qquad 10^4 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{4 \text{ volte}}, \qquad 10^1 = 10.$$

- Se l'esponente è zero, si ha $10^0 = 1$

- Se l'esponente è negativo, si ha $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$

Per esempio, $\quad 10^{-1} = \dfrac{1}{10}, \qquad 10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000}.$

POTENZA DI 10	FRAZIONE	NUMERO	NOME
10^{-9}	$\frac{1}{10^9}$	0,000 000 001	un miliardesimo
10^{-6}	$\frac{1}{10^6}$	0,000 001	un milionesimo
10^{-3}	$\frac{1}{10^3}$	0,001	un millesimo
10^{-2}	$\frac{1}{10^2}$	0,01	un centesimo
10^{-1}	$\frac{1}{10}$	0,1	un decimo
10^0		1	uno
10^1		10	dieci
10^2		100	cento
10^3		1000	mille
10^6		1 000 000	un milione
10^9		1 000 000 000	un miliardo

Quando si scrive il risultato di una potenza di 10, bisogna stare attenti a non sbagliare il numero degli zeri. Per controllare, si può usare la seguente regola mnemonica, come si vede dalla tabella sopra.

Il risultato di una potenza di 10 contiene un numero di zeri uguali all'esponente.

Per esempio, $10^3 = 1000$ ha 3 zeri, $\quad 10^{-2} = 0{,}01$ ha 2 zeri.

Proprietà delle potenze

- **Moltiplicazione** $\quad 10^m 10^n = 10^{m+n}$

  Per esempio, $10^2 \times 10^4 = 10^6$, $\; 10^3 \times 10^{-5} = 10^{-2}$, $\; 10^{-1} \times 10^{-3} = 10^{-4}$.

- **Divisione** $\dfrac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$

Per esempio, $\dfrac{10^5}{10^2} = 10^3$, $\dfrac{10^3}{10^4} = 10^{-1}$, $\dfrac{10^2}{10^{-3}} = 10^5$.

- **Potenza** $(10^m)^n = 10^{m\times n}$

Per esempio, $(10^5)^3 = 10^{15}$, $(10^2)^{-3} = 10^{-6}$, $(10^{-2})^{-4} = 10^8$.

Espressioni con le potenze

$$2 \times 10^2 \times 3 \times 10^3 - \frac{6 \times 10^9}{2 \times 10^5} + (3 \times 10^3)^2 =$$

Questa espressione contiene numeri compresi tra 0 e 10 (*coefficienti*) e potenze di 10. Per calcolarla, conviene fare prima le operazioni tra i coefficienti e poi quelle tra le potenze di 10. Così si sfruttano le proprietà delle potenze.

- **Moltiplicazione**

$$2 \times 10^2 \times 3 \times 10^3 = (2 \times 3) \times (10^2 \times 10^3) = 6 \times 10^{2+3} = 6 \times 10^5.$$

- **Divisione**

$$\frac{6 \times 10^9}{2 \times 10^5} = \frac{6}{2} \times \frac{10^9}{10^5} = 3 \times 10^{9-5} = 3 \times 10^4.$$

- **Potenza**

$$(3\times 10^3)^2 = 3^2 \times (10^3)^2 = 9 \times 10^{3\times 2} = 9 \times 10^6.$$

- **Addizioni e sottrazioni**

Esponenti uguali: si mantiene l'esponente e si sommano i coefficienti numerici.

$$3 \times 10^7 + 5 \times 10^7 = (3 + 5) \times 10^7 = 8 \times 10^7$$

Esponenti diversi: si riconducono le potenze all'esponente più piccolo e poi si opera la somma come è spiegato sopra:

$$4 \times 10^6 + 3 \times 10^4 + 6 \times 10^5 = 4 \times 10^2 \times 10^4 + 3 \times 10^4 + 6 \times 10^1 \times 10^4 =$$

$$= 400 \times 10^4 + 3 \times 10^4 + 60 \times 10^4 = (400 + 3 + 60) \times 104 =$$

$$= 463 \times 10^4 = 4{,}63 \times 10^6.$$

11. LE EQUAZIONI

Un'equazione è una richiesta. Per esempio, l'equazione

$$x + 2 = 3$$

chiede: «qual è il numero x che, sommato a 2, dà come risultato 3?».
x è l'*incognita*, cioè la grandezza di cui bisogna trovare il valore.

Il numero richiesto è 1. Perciò la soluzione dell'equazione è

$$x = 1.$$

Per risolvere un'equazione bisogna isolare l'incognita, cioè fare in modo che l'incognita si trovi da sola a sinistra dell'uguale. Si usano due princìpi di equivalenza.

Primo principio di equivalenza (addizione e sottrazione)

Nell'equazione precedente, per isolare l'incognita abbiamo sottratto 2 da una parte e dall'altra dell'uguale:

$$x + \cancel{2} \cancel{-2} = 3 - 2.$$

In un'equazione, si può sommare o sottrarre una stessa espressione a sinistra e a destra dell'uguale.

La nuova equazione che otteniamo ha le stesse soluzioni di quella di partenza.
Consideriamo l'equazione

$$U_2 - U_1 = Q$$

nell'incognita U_2, mentre U_1 e Q indicano numeri fissi: per esempio $U_1 = 5$ e $Q = 3$. Per isolare U_2, sommiamo U_1 a sinistra e a destra dell'uguale:

$$U_2 - \cancel{U_1} \cancel{+U_1} = Q + U_1.$$

La soluzione è

$$U_2 = Q + U_1.$$

Poiché U_1 è uguale a 5 e Q a 3, U_2 è uguale a 8.

Secondo principio di equivalenza (moltiplicazione e divisione)

Risolviamo l'equazione

$$F = m\,a$$

nell'incognita a (F e m indicano numeri fissi). Per isolare a, dividiamo per m (che supponiamo diverso da zero) a sinistra e a destra dell'uguale:

$$\frac{F}{m} = \frac{\cancel{m}\,a}{\cancel{m}}.$$

Otteniamo

$$\frac{F}{m} = a, \qquad \text{cioè} \qquad a = \frac{F}{m}.$$

In un'equazione, si può moltiplicare o dividere per una stessa espressione, diversa da zero, a sinistra e a destra dell'uguale.

- Nella formula della densità, supponiamo di conoscere il valore della densità d e del volume V e di voler ricavare la massa (incognita m):

$$d = \frac{m}{V}.$$

Moltiplicando per V i due membri dell'equazione

$$d \times V = \frac{m}{\cancel{V}} \cancel{\times V}$$

isoliamo l'incognita e otteniamo la soluzione

$$d\,V = m \qquad \text{cioè} \qquad m = d\,V.$$

- Nella formula della densità, supponiamo di conoscere il valore della densità d e della massa m e di voler ricavare il volume (incognita V):

$$d = \frac{m}{V}.$$

Prima portiamo V a numeratore, moltiplicando per V:

$$d \times V = \frac{m}{\cancel{V}} \cancel{\times V}.$$

poi dividiamo per d per isolare l'incognita:

$$\frac{\cancel{d}\,V}{\cancel{d}} = \frac{m}{d}, \qquad V = \frac{m}{d}.$$

- Ricaviamo l'incognita t nell'equazione:

$$s = \frac{1}{2} a t^2.$$

Isoliamo t^2 moltiplicando per $\frac{2}{a}$:

$$\frac{2}{a} \times s = \frac{\cancel{2}}{\cancel{a}} \times \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{a}\, t^2, \qquad \frac{2s}{a} = t^2.$$

Dopo aver riscritto l'equazione con l'incognita t a sinistra dell'uguale,

$$t^2 = \frac{2s}{a},$$

troviamo t estraendo la radice quadrata di entrambi i membri dell'equazione

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$$

- Ricaviamo l'incognita v nell'equazione

$$s = s_0 + vt.$$

Applichiamo il primo principio di equivalenza per isolare il prodotto $v\,t$,

$$s - s_0 = \cancel{s_0} + vt - \cancel{s_0}, \qquad vt = s - s_0;$$

poi, con il secondo principio, mettiamo in evidenza l'incognita dividendo per t i due membri nell'ultimo passaggio:

$$\frac{v\cancel{t}}{\cancel{t}} = \frac{s - s_0}{t}.$$

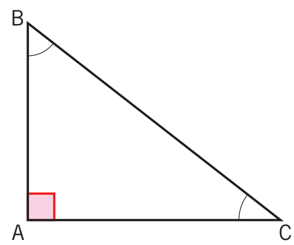
Quindi il risultato è:

$$v = \frac{s - s_0}{t}$$

12. SENO E COSENO DI UN ANGOLO

Nella figura è disegnato un triangolo rettangolo ABC, con l'angolo retto nel vertice A. Consideriamo uno dei suoi angoli acuti, per esempio l'angolo $\hat{C}$.

Il seno e il coseno dell'angolo $\hat{C}$ sono definiti nel modo seguente:



- il seno di $\hat{C}$ (sen $\hat{C}$) è uguale al rapporto tra il cateto opposto a $\hat{C}$ e l'ipotenusa.
- il coseno di $\hat{C}$ (cos $\hat{C}$) è uguale al rapporto tra il cateto adiacente a $\hat{C}$ e l'ipotenusa.

In formule:

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \qquad e \qquad \cos\hat{C} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}$$

La tabella fornisce alcuni valori del seno e del coseno di un angolo.

ANGOLO	0°	30°	45°	60°	90°
SENO	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
COSENO	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

Dalle formule precedenti possiamo ricavare che

$$\overline{AB} = \overline{BC}\operatorname{sen}\hat{C} \qquad \text{e} \qquad \overline{CA} = \overline{BC}\cos\hat{C}$$

A parole, queste espressioni significano che, in un triangolo rettangolo:

- un cateto è uguale all'ipotenusa, moltiplicata per il seno dell'angolo opposto al cateto;
- un cateto è uguale all'ipotenusa, moltiplicata per il coseno dell'angolo adiacente al cateto.

13. LA CALCOLATRICE SCIENTIFICA

Per risolvere un problema di fisica occorre analizzare i dati, scegliere una strategia e alla fine svolgere i calcoli con l'aiuto della calcolatrice scientifica.
In questo video *tutorial*, vengono presentate le principali caratteristiche e funzioni di una calcolatrice scientifica. E'utile conoscerle e saperle usare per svolgere correttamente i calcoli.

In particolare descriveremo:

1. la funzione del punto e della virgola;
2. l'uso delle parentesi per calcolare un'espressione numerica;
3. come si calcola l'inverso di un numero;
4. come funziona l'elevamento a potenza;
5. come si eseguono la radice quadrata e la radice cubica di un numero;
6. come si svolgono alcune funzioni goniometriche e le loro inverse.

Esistono molte marche e molti modelli di calcolatrice. E' quindi impossibile descrivere il funzionamento di ognuna di esse. Chi possiede una calcolatrice con alcuni dettagli operativi diversi da quelli presentati nell'animazione potrà comunque imparare da essa i principi di funzionamento e sarà poi in grado di adattare le procedure al proprio caso.

ESERCIZI

20 TEST INTERATTIVI CON FEEDBACK «Hai sbagliato, perché...» ONLINE SU ZTE

Mappa dei concetti nell'eBook

PER COMINCIARE

1 **ESPERIMENTI A CASA** **Proporzionalità: ma di che tipo?**

Prendi due bicchieri cilindrici di area di base diversa e riempi il più piccolo per metà con dell'acqua. Misura l'altezza dell'acqua nel bicchiere, il diametro di base, e calcola il volume del cilindro d'acqua come "area di base per altezza". Poi versa l'acqua nell'altro bicchiere.

- Quanto vale ora il volume? Che relazione c'è fra l'area di base e l'altezza?

Guarda l'esperimento e prova a farlo tu.

2 **HO SENTITO DIRE CHE...** «Nel mondo, per ogni uomo ci sono 7 donne.»

- Fai una ricerca in Internet per stabilire se questa frase è vera o falsa.
- Esponi per punti le tue conclusioni in 10 righe: cita i siti che hai consultato e riporta dati numerici e fonti.

1. I RAPPORTI

DOMANDE SUI CONCETTI

1 Indica l'operazione necessaria per ottenere l'informazione richiesta.

- Il costo di un foglio di carta da fotocopie.
- La distanza percorsa da un'automobile con un litro di carburante.
- Il carburante necessario a un'automobile per percorrere 1 km.
- Il consumo medio di cioccolata in Italia nel 2013.

2 Perché questa frase non è corretta? «Se io aumento sia il numeratore sia il denominatore di una frazione, il risultato non cambia.»

ESERCIZI NUMERICI

3 ★ Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri:

$$\frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{16}{9} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{1}{3}$$

4 ★ Una boccetta di medicinale da 10 mL con contagocce può erogare 600 gocce di medicinale.

- Qual è in media il volume di una goccia?

[0,017 ml]

5 ★ **SPORT** **Quando Ibrahimović era nell'Inter**

Nel campionato di calcio di serie 2008/2009, Zlatan Ibrahimovic giocò con l'Inter segnando 25 reti in 35 partite.

- Quanti gol ha segnato, in media, in ogni partita?

[0,7]

2. LE PROPORZIONI

ESERCIZI NUMERICI

6 ★ A partire dai seguenti rapporti, puoi costruire 4 proporzioni. Quali?

$$\frac{1}{2};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{2};\ \frac{6}{10};\ \frac{6}{12};\ \frac{12}{24}$$

7 ★ Risolvi le proporzioni:

$10 : 14 = 25 : x$

$8{,}1 : 1{,}8 = x : 6{,}0$

$6{,}4 : x = 102{,}4 : 25{,}6$

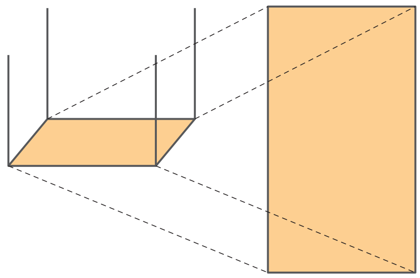
$16 : x = x : 25$

[35; 27; 1,6; 20]

8 ★ Un foglio di carta ha dimensioni rispettivamente pari a 15,0 cm e 10,5 cm.

- È possibile riprodurre su questo foglio un'immagine le cui dimensioni originarie sono rispettivamente pari a 20,0 cm e 12,0 cm, senza tagliare l'immagine né lasciare spazi bianchi?

9 ★★☆ Una stanza rettangolare è larga 4,0 m e lunga 5,2 m. Vogliamo realizzarne una piantina in scala, in modo che la larghezza della stanza risulti 16,0 cm.



▶ Qual è lunghezza della piantina?

[20,8 cm]

10 ★☆☆ **FACCIAMO DUE CONTI Quanti sono i giovani?**

Nel 2000, nel Lazio vivevano 5300 000 persone. Di esse, 753 000 avevano meno di 15 anni. Nello stesso anno, la popolazione italiana era 57 000 000.

▶ In proporzione quante avrebbero dovuto essere le persone con meno di 15 anni che vivevano in Italia nel 2000?

[Circa 8 000 000]

3. LE PERCENTUALI

ESERCIZI NUMERICI

11 ★☆☆ Determina le percentuali indicate:

a. il 15% di 280 è 42

b. il 24% di 225 è ____________

c. il 3,6% di 115 è ____________

d. lo 0,88% di 0,900 è ____________

12 ★☆☆ Calcola la percentuale:

a. 34 rispetto a 50 è il 68%

b. 0,17 rispetto a 1,2 è il ____________

c. $2{,}9 \times 10^3$ rispetto a $7{,}5 \times 10^3$ è il ____________

d. 13,8 rispetto a 200 è il ____________

13 ★☆☆ Determina il numero che costituisce la percentuale indicata:

a. il 30% di 240 è 72

b. lo 0,85% di 6,8 è ____________

c. l'11,5% di $14{,}0 \times 10^3$ è ____________

d. il 91% di 0,80 è ____________

14 ★☆☆ Il diametro di una penna, misurato con un calibro, è di 1,015 cm con un'incertezza dello 0,5%.

▶ Qual è, in millimetri, il massimo errore che si può commettere in questa misura?

[0,05 mm]

15 ★☆☆ In 100 g d'acqua sciogliamo 2,56 g di sale da cucina.

▶ Qual è la percentuale di sale nella soluzione, cioè la percentuale del sale rispetto all'intera massa dell'acqua e del sale?

[2,50%]

16 ★☆☆ **NATURA Piombo radioattivo**

Se preleviamo 20,7 kg dell'elemento piombo in natura, in media 302 g di tale campione saranno costituiti da atomi radioattivi.

▶ Quale percentuale della massa del piombo sulla Terra è costituita da atomi radioattivi?

[1,46%]

17 ★☆☆ Nell'etichetta di un barattolo di marmellata si specifica che il peso netto è pari a 195 g e la percentuale di frutta sul totale è del 32%.

▶ Qual è la massa di frutta sull'intero prodotto?

[62 g]

18 ★★☆ L'acciaio inossidabile è una lega costituita da ferro (85%), cromo (13%) e carbonio (2%).

▶ In un oggetto di acciaio inossidabile di massa pari a 1,25 kg qual è la massa rispettivamente del ferro, del cromo e del carbonio contenuti?

[1,06 kg; 0,16 kg; 0,03 kg]

19 ★★☆ Il prezzo di un gelato è 1,50 €.

▶ Se l'inflazione teorica è del 2,6%, quanto costerà lo stesso gelato fra un anno?

▶ Se invece il prezzo del gelato fra un anno sarà € 1,60, qual è il reale aumento percentuale?

[€ 1,54; 6,7%]

20 ★★★ Paolo deposita 10 000 € in banca. Il tasso d'interesse è del 2% annuo.

▶ A quanto ammonta il suo capitale dopo un anno?

▶ E dopo due anni?

[10 200 €; 10 404 €]

21 ★★★ **NATURA Fuori dall'acqua**

Il rapporto tra il volume immerso e quello totale di un iceberg è direttamente proporzionale al rapporto tra la densità del ghiaccio ($0{,}94\ g/cm^3$) e quella dell'acqua marina ($1{,}05\ g/cm^3$).

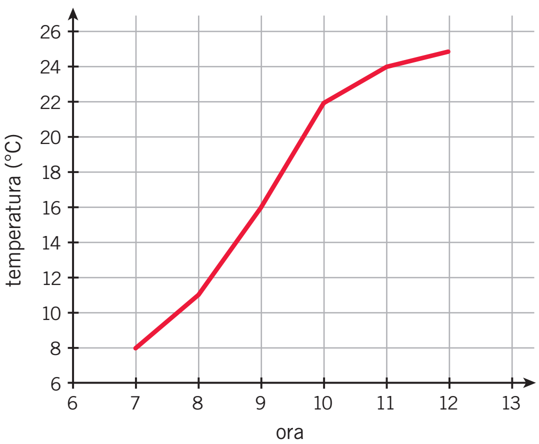
▶ Quale percentuale del volume dell'iceberg emerge dal pelo dell'acqua?

[10%]

4. I GRAFICI

ESERCIZI NUMERICI

22 ★☆☆ Nel grafico è riportata la temperatura misurata tra le 7 e le 12 di un giorno di primavera.



▶ Leggendo i dati del grafico, completa la tabella riportata sotto.

ORA	TEMPERATURA (°C)
7:00	8
8:00	
9:00	
10:00	
11:00	
12:00	

23 ★☆☆ La formula che esprime la relazione fra due grandezze è $y = 10 - x^2$.

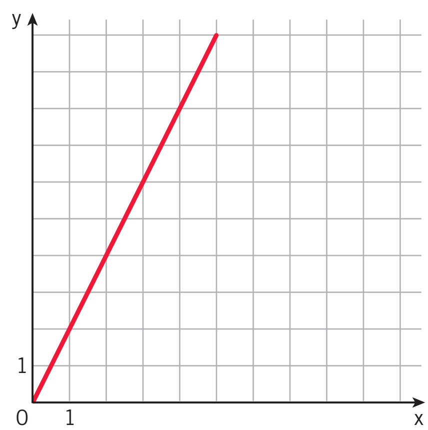
▶ Assegnando a x un certo numero di valori da 0 a 3, traccia il grafico corrispondente.

24 ★☆☆ Un automobilista registra in una tabella i kilometri percorsi nel corso di ogni mese. La tabella ottenuta alla fine dell'anno è la seguente:

MESE	km
1	900
2	1300
3	1400
4	1400
5	1200
6	1200
7	800
8	2000
9	800
10	1300
11	1400
12	1000

▶ Scegli un opportuno fattore di scala sui due assi e costruisci il grafico corrispondente alla tabella come insieme di punti.

25 ★☆☆ Il grafico qui sotto rappresenta la relazione fra due grandezze x e y.



La relazione fra le due grandezze può essere espressa con la formula $y = k\,x$, dove k è un numero assegnato.

▶ Determina il valore di k.

5. LA PROPORZIONALITÀ DIRETTA

DOMANDE SUI CONCETTI

26 Scrivi il valore costante del rapporto fra queste coppie di grandezze, secondo l'esempio:

a. Perimetro e lato di un quadrato: 4

b. Circonferenza e raggio di un cerchio: ________

c. Perimetro e lato di un triangolo equilatero: ________

d. Diagonale e lato di un quadrato: ________

27 Scrivi la formula che lega queste coppie di grandezze direttamente proporzionali, secondo l'esempio:

a. Perimetro P e lato l di un quadrato: $P = 4\,l$

b. Circonferenza C e diametro d di un cerchio: ________

c. Area A e quadrato q del raggio di un cerchio: ________

d. Perimetro P e lato l di un esagono regolare: ________

28 **FUORI DAGLI SCHEMI** Perché questa frase non è corretta? «Tutte le relazioni di proporzionalità diretta hanno come grafico una retta, e tutte le rette corrispondono a una relazione di proporzionalità diretta.»

ESERCIZI NUMERICI

29 ★☆☆ La tabella seguente riporta il volume e la massa di quantità variabili di alcol.

VOLUME (cm^3)	MASSA (g)
5	4,0
10	8,0
15	12,0
20	16,0
25	20,0

- Qual è il valore costante del rapporto fra massa e volume nell'alcol?
- Qual è la formula che lega la massa m e il volume V di una quantità data di alcol?

[0,80 g/cm^3; $m = (0{,}80\ \text{g/cm}^3)\ V$]

30 ★☆☆ Costruisci il grafico della relazione di proporzionalità presentata nell'esercizio precedente.

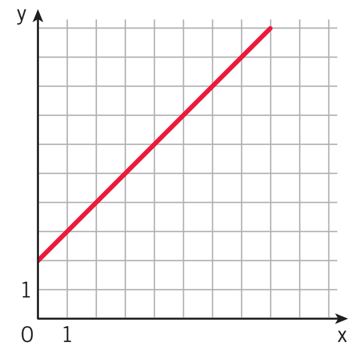
- Si tratta di una retta passante per l'origine? Perché?

31 ★☆☆ Ho corso per 2 km e ho consumato 180 kcal.

- Visto che il dispendio di energia è direttamente proporzionale alla distanza percorsa, quanto consumo quando corro per 6 km?

[540 kcal]

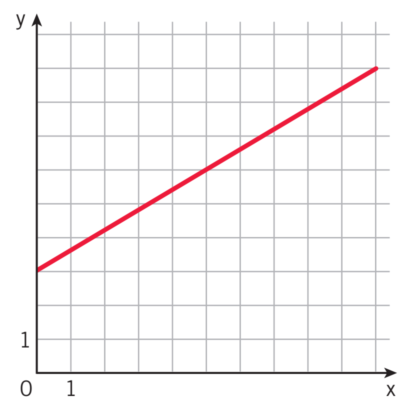
32 ★★☆ Il grafico qui sotto rappresenta la relazione di dipendenza lineare fra le grandezze x e y.



- Determina la formula che esprime tale relazione nella forma $y = kx + q$.
- Cosa accade alla relazione fra x e y se si pone $q = 0$?
- Come si trasforma un grafico in questo caso?

[$y = x + 2$]

33 ★★☆ La relazione fra le grandezze x e y è descritta dal grafico seguente.



- Di che tipo di relazione si tratta?
- Quando x aumenta di cinque unità, quale aumento subisce y?
- Quanto vale il rapporto (costante) fra un aumento di x e il corrispondente aumento di y?
- Quale formula esprime la relazione fra x e y?

[y aumenta di tre unità; 5/3; $y = \frac{3}{5}x + 3$]

6. LA PROPORZIONALITÀ INVERSA

ESERCIZI NUMERICI

34 ★☆☆ Perché questa frase non è corretta? «Il primo ottobre la temperatura era di 12 °C; il due ottobre c'erano 10 °C; il 3 avevamo 8 °C. La temperatura sta scendendo in modo inversamente proporzionale al trascorrere dei giorni.»

35 ★☆☆ Scrivi la formula che lega queste coppie di grandezze inversamente proporzionali, secondo l'esempio:

a. Numero N di lati e lato l di un poligono regolare di perimetro pari a 10 cm.

$$N = \frac{10\ \text{cm}}{l}$$

b. Base b e altezza h di un rettangolo di area pari a 25 m^2.

____

c. Area di base A e altezza h di una piramide di volume pari a 32 cm^3.

____

36 ★☆☆ Il prodotto di due lunghezze x e y inversamente proporzionali ha il valore costante di 60 m^2.

▶ Qual è il valore di y se x è pari a 5,0 m?

▶ Assegna ad x una serie di valori, calcola i corrispondenti valori di y e traccia il grafico della loro relazione.

[12 m]

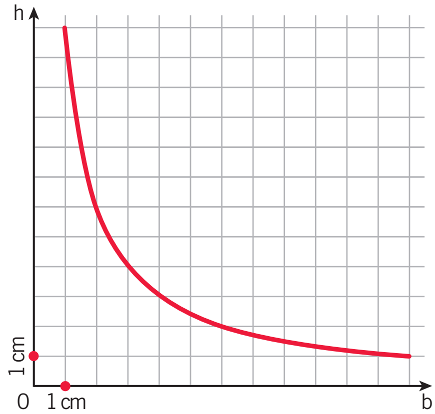
37 ★★☆ Con uno stesso volume di liquido, pari a 50 cm^3, riempiamo alcuni recipienti cilindrici di diametro variabile. Il liquido raggiunge in ogni caso un'altezza diversa.

▶ Compila la seguente tabella relativa all'esempio descritto:

AREA DI BASE A (cm^2)	ALTEZZA RAGGIUNTA DAL LIQUIDO h (cm)
10	5,0
20	
30	
40	
50	

▶ Qual è la formula che esprime la relazione fra A e h?

38 ★★☆ Il grafico qui sotto illustra la relazione fra la base b e l'altezza h di una serie di rettangoli diversi, aventi tutti la stessa area.



▶ Qual è il valore comune dell'area dei rettangoli?

▶ Qual è la formula che esprime la relazione fra b e h?

[12 cm^2; $h = 12\ cm^2/b$]

7. LA PROPORZIONALITÀ QUADRATICA DIRETTA E INVERSA

ESERCIZI NUMERICI

39 ★☆☆ Scrivi il valore costante del rapporto fra la prima grandezza e il quadrato della seconda, in base all'esempio.

a. Area e lato di un quadrato: 1

b. Area e raggio di un cerchio: ____________

c. Area e diagonale di un quadrato: ____________

40 ★☆☆ Scrivi la formula che lega le coppie di grandezze dell'esercizio precedente, secondo l'esempio:

a. Area A e lato l di un quadrato: $A = l^2$

b. Area A e raggio r di un cerchio: ____________

c. Area A e diagonale d di un quadrato: ____________

41 ★☆☆ L'attrazione gravitazionale F fra due corpi rispettivamente di massa M_1 e M_2 posti alla distanza d si determina con la formula

$$F = G \times \frac{M_1 M_2}{d^2},$$

dove G è una costante detta costante di gravitazione universale.

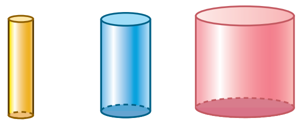
▶ Che tipo di relazione esiste fra F e d per due corpi dati?

42 ★☆☆ Quando un oggetto cade all'interno di un tubo in cui è stato fatto il vuoto, la distanza d da esso percorsa e l'intervallo di tempo i da esso impiegato sono legati dalla relazione $d = 4{,}9\ i^2$.

▶ Qual è la distanza percorsa da un oggetto che cade in questo modo in un intervallo di 1,2 s?

[7,1 m]

43 ★☆☆ In un cilindro di altezza h = 1,00 m, il volume V aumenta rapidamente all'aumentare del raggio r.



▶ Assegna al raggio una serie di valori compresi fra 0,10 m e 1,00 m, determina il corrispondente valore del volume e traccia il grafico in base alla tabella ottenuta.

8. COME SI LEGGE UNA FORMULA

DOMANDE SUI CONCETTI

44 In base all'esempio, esprimi a parole le seguenti formule, dove compaiono le grandezze generiche x, y e z:

a. $z = 20\,xy$ è direttamente proporzionale sia a x sia a y

b. $z = \pi\, x/y$ ______________________

____

c. $z = \sqrt{3}\ y^2/x$ ______________________

____

d. $z = 0{,}5\, y/x^2$ ______________________

____

45 Traduci in formule queste affermazioni sulla relazione fra diverse grandezze, introducendo un fattore di proporzionalità k, come nell'esempio.

a. La lunghezza dell'ombra è direttamente proporzionale all'altezza dell'oggetto: $L = kh$

b. Il prezzo degli oggetti è inversamente proporzionale al loro numero: ______________

c. La superficie del corpo è direttamente proporzionale al quadrato della sua larghezza: ______________

d. La forza di gravità è inversamente proporzionale al quadrato della distanza: ______________

ESERCIZI NUMERICI

46 ★☆☆ La durata D di un'escursione è direttamente proporzionale al numero N di tappe. Per un certo valore di N, D risulta uguale a 2,5 ore.

▶ Quale valore assume D per un numero di tappe triplo rispetto a quello dell'esempio?

[D = 7,5 ore]

47 ★☆☆ Il tempo T necessario a fabbricare un certo prodotto è inversamente proporzionale al numero O di operai che eseguono il lavoro. Per un valore particolare di O, il valore di T risulta pari a 48 ore.

▶ Quale risulterà il valore di T se il numero degli operai viene moltiplicato per cinque volte?

[T = 9,6 ore]

48 ★★☆ La quantità Q di vernice necessaria per verniciare un oggetto sferico è direttamente proporzionale al quadrato del raggio r dell'oggetto. Q risulta uguale a 60 g per un certo valore di r.

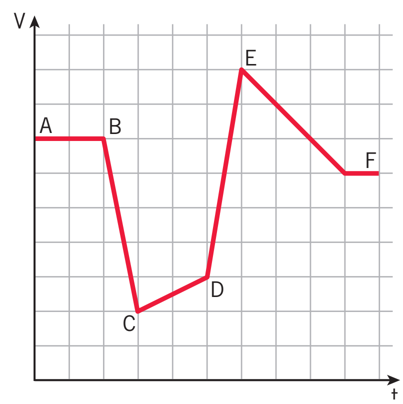
▶ Quale valore assume Q se il valore di r è raddoppiato?

[Q = 240 g]

9. COME SI LEGGE UN GRAFICO

ESERCIZI NUMERICI

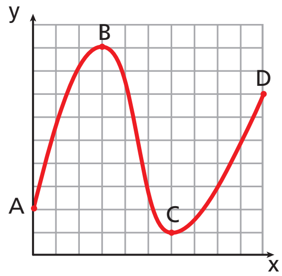
49 ★☆☆ Il grafico seguente riproduce l'andamento del valore V di un titolo finanziario al passare del tempo t.



▶ Descrivi l'andamento di V, nelle varie fasi. Utilizza termini come «aumenta rapidamente» o «diminuisce lentamente» o «resta invariato».

50 ★☆☆ Traccia due grafici diversi fra loro, in modo che entrambi rappresentino il seguente andamento della variabile y in funzione della variabile x: «All'aumentare di x, y in una prima fase aumenta lentamente, poi resta costante, infine diminuisce rapidamente.»

51 ★☆☆ Descrivi a parole l'andamento della grandezza y al variare della grandezza x.



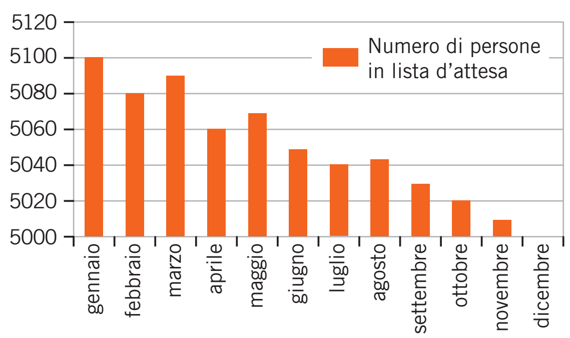
- Come puoi modificare il grafico in modo che la grandezza y sembri variare poco?

52 ★☆☆ La tabella riporta la temperatura di una stanza al passare del tempo.

t (min)	t (°C)
0	18,0
5	18,2
10	18,4
15	18,5
20	18,5
25	18,3
30	18,2
35	18,3
40	18,2
45	18,1

- Traccia un grafico a partire dalla tabella.
- Descrivi a parole l'andamento del grafico.
- Disegna un altro grafico che dia la sensazione che la temperatura vari di molto.

53 ★★☆



Il diagramma illustra la riduzione dei pazienti in lista d'attesa negli ospedali di una determinata autorità sanitaria.

- A quanto equivale in percentuale la diminuzione di pazienti in lista d'attesa da gennaio a dicembre?
- Come puoi modificare il grafico perché la grandezza y (numero di persone in lista d'attesa) sembri variare di poco?

[2,0%; scala sull'asse verticale da 0 a 5100]

10. LE POTENZE DI 10

ESERCIZI NUMERICI

54 ★☆☆ Traduci queste potenze di 10 in numeri decimali:

a. $10^7 = 10\,000\,000$

b. $10^{11} =$ ____________________

c. $10^{-4} =$ ____________________

d. $10^{-8} =$ ____________________

55 ★☆☆ Scrivi i numeri espressi a parole prima in cifre e poi come potenza di dieci:

a. un milione 1 000 000 10^6

b. un miliardo ____________________

c. cento miliardi ____________________

d. diecimila miliardi ____________________

56 ★☆☆ Traduci questi numeri decimali in potenze di 10:

a. $0{,}000\,01 = 10^{-5}$

b. $0{,}001 =$ ____________________

c. $100\,000 =$ ____________________

d. $10\,000\,000 =$ ____________________

57 ★☆☆ Determina il risultato delle seguenti operazioni:

a. $10^4 \times 10^{12} = 10^{16}$ $10^6 \div 10^9$

b. $10^{11} \times 10^{-8}$ $10^{-5} \div 10^{-11}$

c. $10^{-7} \times 10^4$ $(10^4)^3$

d. $10^{-18} \times 10^{-7}$ $(10^{-2})^5$

58 ★☆☆ Determina il risultato delle seguenti operazioni:

a. $10^{-1} \times 10^{-2} = 10^{-3}$ $10^7 \div 10^5$

b. $10^{-6} \times 10^6$ $10^3 \div 10^{-3}$

c. $10^{-8} \times 10^{15}$ $(10^3)^{-4}$

d. $10^8 \times 10$ $(10^4)^2$

59 ★★☆ Il lato dell'area quadrata rappresentata in scala in questa mappa misura $2{,}4 \times 10^3$ m.

▶ Determina l'area della zona in m^2.

[$5{,}8 \times 10^6$ m^2]

60 ★★☆ Determina il risultato di questa espressione:

$$\frac{12 \times 10^8}{4 \times 10^3} + (0{,}5 \times 10^3)^2 - (6 \times 10^{11}) \times (9 \times 10^{-6})$$

[$-4{,}9 \times 10^6$]

61 ★★☆ Determina il risultato di questa espressione:

$$3 \times 10^6 + \frac{12 \times 10^{-4}}{0{,}3 \times 10^{-9}} - \frac{3{,}2 \times 10^{-6}}{0{,}01 \times 10^{-9}} + -(1{,}6 \times 10^6)$$

[$5{,}08 \times 10^6$]

62 ★★★ **SPAZIO Fra Terra e Sole**

L'attrazione gravitazionale F fra due corpi rispettivamente di massa M_1 e M_2, posti alla distanza d, si determina (tralasciando le unità di misura) con la formula:

$$F = 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{M_1 M_2}{d^2}$$

Nel caso del sistema Sole-Terra, i valori delle grandezze indicate sono:

$M_1 = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg; $M_2 = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg;

$d = 1{,}50 \times 10^{11}$ m.

▶ Determina l'intensità dell'attrazione gravitazionale fra il Sole e la Terra, sempre tralasciando le unità di misura.

[$3{,}53 \times 10^{22}$]

11. LE EQUAZIONI

ESERCIZI NUMERICI

63 ★☆☆ In queste equazioni, isola l'incognita e specifica quale principio hai usato:

a. $x + 7 = 8$ $\quad x = 8 - 7$ $\quad$ Primo principio

b. $4\,x = 35$ ________________

c. $27 - x = 30$ ________________

d. $5x - 9 = 31$ ________________

64 ★☆☆ In queste equazioni, isola l'incognita x applicando i principi di equivalenza:

a. $x + a = b$ $\quad x = b - a$

b. $kx = h$ ________________

c. $m - x = n$ ________________

d. $ax - b = c$ ________________

65 ★☆☆ Risolvi la seguente equazione:

$30\,x + 12 = 72$

[2]

66 ★☆☆ Isola l'incognita di queste equazioni:

a. $-kx = F$

b. $m - x = n$

c. $vx + s = p$

67 ★★☆ Trasforma queste frasi in equazioni e risolvile.

▶ Quale numero moltiplicato per 3 dà come risultato 126?

▶ Quale numero diminuito di 3 dà come risultato -7?

▶ Quale numero diviso per 112 dà come risultato 1?

▶ Quale numero moltiplicato per 5 e sommato a 12 dà come risultato 27?

[42; −4; 112; 3]

68 ★★★ Risolvi la seguente equazione:

$20\,x^2 = 75$

[1,9]

69 ★★★ Risolvi in v la seguente equazione:

$mv^2 - 2K = 0$

$\left[v = \sqrt{\frac{2k}{m}}\right]$

12. SENO E COSENO DI UN ANGOLO

ESERCIZI NUMERICI

70 ★☆☆ In un triangolo rettangolo, l'ipotenusa misura 20 cm e un cateto misura 12 cm.

▶ Quanto vale il seno dell'angolo opposto a quel cateto?

[0,60]

71 ★☆☆ In un triangolo rettangolo, l'ipotenusa misura 14 cm e un cateto misura 9,0 cm.

- Quanto vale il coseno dell'angolo adiacente a quel cateto?
- Quanto vale il seno dello stesso angolo?

[0,64; 0,79]

72 ★☆☆ L'ipotenusa $\overline{BC}$ di un triangolo rettangolo misura 68,4 cm e l'angolo $A\hat{B}C$ è di 52°. La calcolatrice fornisce il valore sen 52° = 0,788.

- Calcola la lunghezza del cateto $\overline{AC}$ del triangolo.
- Determina la lunghezza del cateto $\overline{AB}$.

[53,9 cm; 42,1 cm]

73 ★☆☆ L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è inclinata di 60° rispetto al cateto orizzontale e ha modulo 410 cm.

- Disegna il triangolo.
- Calcola la lunghezza dei due cateti.

[355 cm, 205 cm]

74 ★★☆ Nel triangolo rettangolo ABC, il cateto $\overline{AC}$ misura 22,4 cm e l'angolo $A\hat{B}C$ misura 34°.

- Calcola la lunghezza dell'ipotenusa $\overline{BC}$.
- Calcola il seno e il coseno dell'angolo $A\hat{C}B$.

[40,1 cm; 0,56, 0,83]

75 ★★☆ **PROBLEMA SVOLTO**

Quando il triangolo non è rettangolo

In un triangolo ottusangolo $\overline{AB}$ = 30 cm e $\overline{AC}$ = 26 cm. L'angolo compreso tra questi due lati misura 139°.

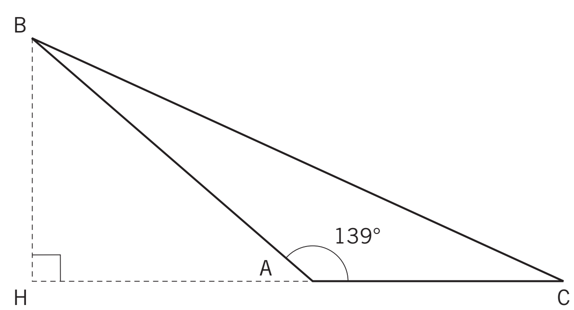
- Quanto misura il lato $\overline{BC}$?

DATI E INCOGNITE

	GRANDEZZE	SIMBOLI	VALORI	COMMENTI
DATI	Lunghezza del lato AB	$\overline{AB}$	30 cm	
	Lunghezza del lato AC	$\overline{AC}$	26 cm	
	Angolo compreso	$B\hat{A}C$	139°	Il triangolo è ottusangolo
INCOGNITE	Lunghezza del lato BC	$\overline{BC}$	?	

RAGIONAMENTO

- Disegniamo il triangolo e tracciamo l'altezza $\overline{BH}$.
- $\overline{BC}$ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo BHC e possiamo calcolarla con il Teorema di Pitagora se conosciamo $\overline{BH}$ e $\overline{HC}$.
- Per fare ciò, dobbiamo calcolare l'angolo $B\hat{A}H$ e utilizzare le formule di seno e coseno nel triangolo rettangolo BHA.



RISOLUZIONE

Calcoliamo l'angolo $B\hat{A}H$ = 180° − 139° = 41°

Calcoliamo la misura dei due cateti di BHA: $\overline{BH} = \overline{AB}\sin 41^\circ = 30\text{ cm} \times \sin 41^\circ = 20\text{ cm}$

$$\overline{HA} = \overline{AB}\cos 41° = 30\,\text{cm} \times \cos 41° = 23\,\text{cm}$$

Dunque $\overline{HC} = \overline{HA} + \overline{AC} = 23\,\text{cm} + 26\,\text{cm} = 49\,\text{cm}$

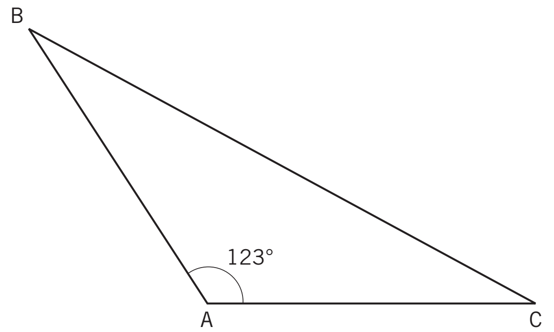
Applichiamo il Teorema di Pitagora: $\overline{BC} = \sqrt{\overline{HC}^2 + \overline{BH}^2} = \sqrt{(49^2 + 20^2)\,\text{cm}^2} = 53\,\text{cm}$

CONTROLLO DEL RISULTATO

Il lato $\overline{BC}$ calcolato è minore della somma degli altri due lati $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ del triangolo ottusangolo e maggiore della loro differenza, come deve essere per un teorema di geometria.

76 ★★☆ Un triangolo ottusangolo ha i lati che misurano $\overline{AB} = 5{,}0\,\text{cm}$ e $\overline{AC} = 7{,}0\,\text{cm}$. L'angolo compreso tra questi due lati misura 123°.

▶ Quanto misura il lato $\overline{BC}$?



[11 cm]

PROBLEMI GENERALI

1 **E ADESSO CHE COSA SUCCEDE?** **Tra due e tre**

▶ Che tipo di proporzionalità esiste fra il diametro e la massa di due palline di carta stagnola?

Guarda nell'eBook *Il problema* e segui *La discussione*.

- Sei d'accordo con gli studenti del video? Spiega perché.

Guarda nell'eBook *La conclusione*.

2 ★☆☆ **TECNOLOGIA** **Musica compressa**

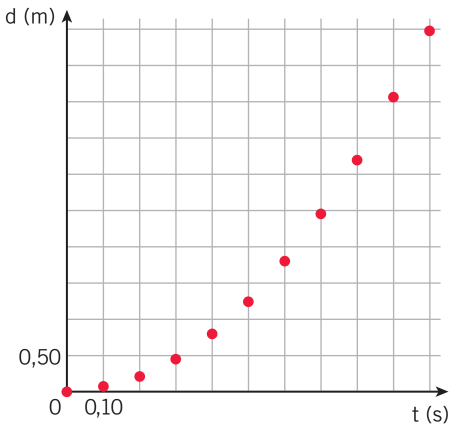
Un file musicale in formato compresso ha una durata di 2 minuti e 58 secondi e una dimensione in memoria di 736 368 byte.

▶ Qual è la dimensione in memoria di un secondo di musica?

▶ Quanto durerebbe l'esecuzione della musica compressa in un solo byte?

[4137 byte; $2{,}417 \times 10^{-4}$ s]

3 ★☆☆ Il grafico di seguito è stato costruito in base ai dati sulla caduta di un oggetto all'interno di un tubo dove era stato fatto il vuoto. Con un sonar, lo sperimentatore ha registrato a intervalli regolari di tempo le distanze percorse dall'oggetto.



▶ Qual è l'ultimo istante in cui è stata effettuata una registrazione?

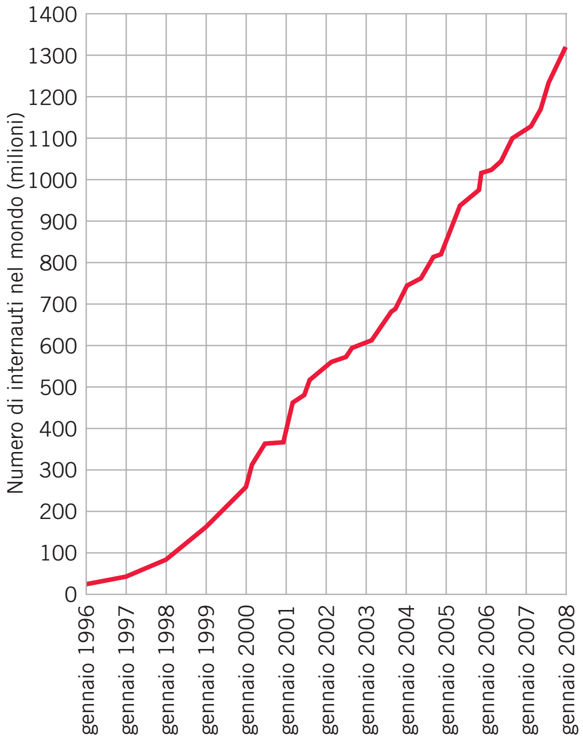
▶ Qual è la massima distanza misurata dal sonar?

▶ Compila una tabella corrispondente al grafico.

[1,00 s; 5,0 m]

4 ★★☆ **TECNOLOGIA Internet nel mondo**

Il grafico seguente rappresenta la crescita del numero di persone nel mondo che hanno accesso a Internet.



- Qual era il numero di queste persone nel gennaio 1999? E nel gennaio 2003?
- Qual è stato in percentuale l'aumento degli utenti di Internet fra il 1999 e il 2003?
- Se questa percentuale di aumento si mantenesse costante, quante persone dovrebbero avere accesso a Internet nel 2007?
- Questa previsione è confermata dal grafico?

[circa 150 milioni; circa 600 milioni; 300%; 2 400 milioni]

5 ★★☆ Considera la relazione matematica espressa dalla formula:

$$y = \frac{x^3}{50}$$

- Assegna a x una ventina di valori distinti compresi fra -5 e 5 e calcola i corrispondenti valori di y, quindi costruisci il grafico corrispondente.
- Sovrapponi al grafico ottenuto quello della retta $y = 0{,}25x$. Determina i punti che le due linee hanno in comune.

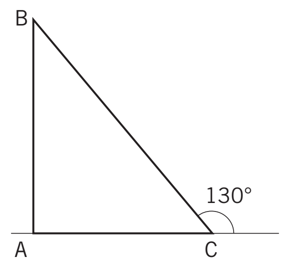
6 ★★☆ La massa di un raccoglitore ad anelli aumenta con il numero di fogli inseriti. La tabella seguente registra una serie di dati della massa:

NUMERO FOGLI	MASSA (g)
0	300
25	425
50	550
75	675
100	800

- Traccia il grafico corrispondente a questa tabella e stabilisci che tipo di relazione c'è fra massa e numero di fogli.
- Qual è il rapporto fra l'aumento della massa del raccoglitore e il numero di fogli? Si tratta di un rapporto costante?
- Qual è la formula che lega la massa m del raccoglitore e il numero n dei fogli?

7 Un triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $\overline{BC}$ lunga 3,28 m e l'angolo esterno in C mostrato nella figura che misura 130°.

- Calcola la lunghezza dei due cateti $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.



[2,1 m, 2,5 m]

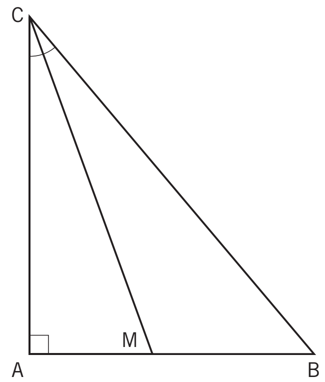
8 L'area di gioco di un campo da beach volley ha una lunghezza l di 16 m e l'angolo che forma la diagonale con il lato più lungo, cioè l, è di 27°.

- Quanto vale la larghezza L del campo?

[8,2 m]

9 Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa $\overline{BC}$ che misura 6,00 m e l'angolo $A\hat{C}B$ di 40°.

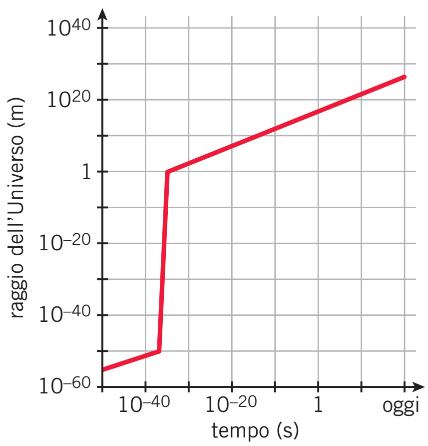
▶ Quanto misura la mediana $\overline{CM}$, che collega C con il punto medio del lato $\overline{AB}$?



[4,99 m]

10 **SPAZIO** **L'universo inflazionario**
★★★

Il grafico seguente (adattato dal libro di Alan Guth, *L'universo inflazionario*) rappresenta una recente ipotesi sull'espansione dell'Universo. Secondo questa ipotesi, a un'età compresa fra i 10^{-37} s e i 10^{-35} s, l'Universo avrebbe subito una espansione rapidissima nota come *inflazione*. Fai attenzione al fatto che gli assi del grafico sono graduati in potenze di 10.



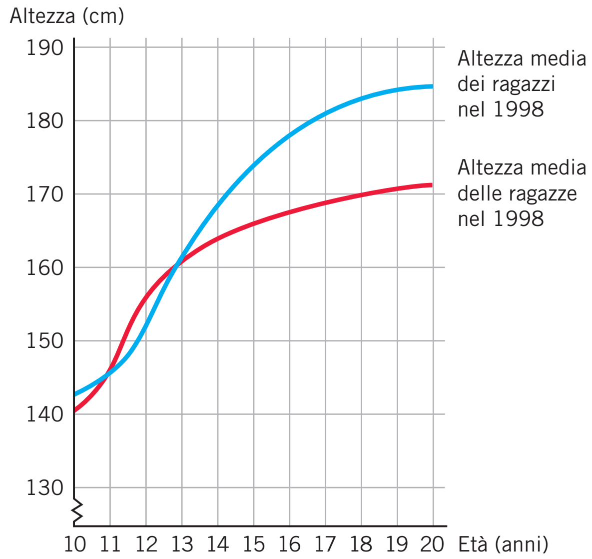
▶ Di quante volte aumenta il raggio dell'Universo passando da una tacca all'altra dell'asse verticale?

▶ Quante volte sarebbe aumentato il raggio dell'Universo nel corso dell'inflazione?

[10^{10} volte; 10^{50} volte]

11 **LA FISICA DEL CITTADINO** **La crescita**

Il grafico seguente mostra l'altezza media dei ragazzi e delle ragazze olandesi nel 1998.



Domanda 1:

A partire dal 1980 l'altezza media delle ragazze di 20 anni è aumentata di 2,3 cm arrivando a 170,6 cm. Qual era l'altezza media delle ragazze di 20 anni nel 1980?

Domanda 2:

Spiega in che modo il grafico mostra che, in media, la crescita delle ragazze è più lenta dopo i 12 anni.

Domanda 3:

In base al grafico, in che periodo della vita le ragazze sono, in media, più alte dei maschi della stessa età?

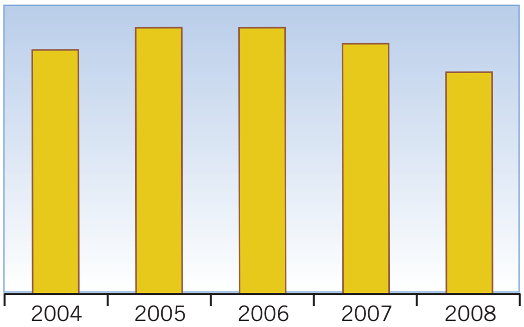
Tratto da prove *PISA* (*Project for International Student Assessment*), 2003.

GIOCHI DI ANACLETO

1 In un rapporto sulla produzione agricola negli anni 2004 - 2008 si leggono i seguenti dati riferiti alle entrate, in milioni di Euro,

	2004	2005	2006	2007	2008
Cereali	504,0	706,9	610,4	472,8	472,6
Orticoltura	74,5	83,7	91,9	86,6	95,0
Allevamento	942,2	1036,1	1033,5	968,0	857,7
Uova e latticini	326,6	331,2	341,3	306,5	273,4

Il grafico si riferisce ad uno di questi settori ma i valori sull'asse delle ordinate sono stati omessi. Di che settore si tratta?



a. Cereali.

b. Orticoltura.

c. Allevamento.

d. Uova e latticini.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2013)

2 In uno studio sulla composizione del suolo si sono raccolti diversi campioni. Ogni campione di terriccio è stato pesato e sono stati pesati anche i suoi componenti, sabbia, argilla e limo, separandoli in base alla dimensione delle particelle di cui sono costituiti. I seguenti risultati si riferiscono a quattro campioni: quale di essi contiene sabbia in percentuale maggiore?

CAMPIONE	MASSA DEL CAMPIONE (g)	MASSA DI SABBIA (g)	MASSA DI LIMO (g)	MASSA DI ARGILLA (g)
A	400	180	40	180
B	150	90	30	30
C	300	171	108	21
D	200	100	14	86

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2011)

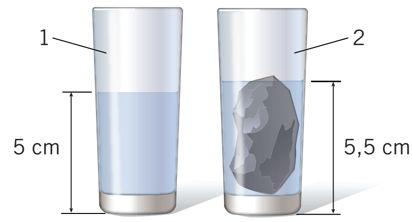
3 Un gruppo di studenti vuole studiare come lo scioglimento dei ghiacci intorno al Polo Sud e in prossimità del Polo Nord influenzi il livello del mare. Per rappresentare la situazione del Polo Nord, dove la calotta glaciale giace sopra l'oceano, gli studenti mettono dell'acqua in un bicchiere (bicchiere 1 nella prima figura), mettono due cubetti di ghiaccio nell'acqua e misurano subito il livello iniziale dell'acqua con il ghiaccio dentro, che è 5 cm. Per rappresentare la situazione del Polo Sud, dove la calotta glaciale ricopre la piattaforma continentale rocciosa, gli studenti mettono un sasso in un bicchiere identico al precedente (bicchiere 2), poi mettono due cubetti di ghiaccio uguali ai primi sopra il sasso e riempiono il bicchiere finché il livello dell'acqua raggiunge i 5 cm. Il sasso non è completamente immerso nell'acqua e il ghiaccio sta fuori dall'acqua.

Osserva nella seconda figura il livello dell'acqua nei bicchieri quando il ghiaccio è tutto sciolto. Se il ghiaccio si scioglie a ritmo costante quale delle seguenti espressioni matematiche descrive come varia il livello (y) dell'acqua nel bicchiere 1 e nel bicchiere 2 durante lo scioglimento del ghiaccio? a e b rappresentano valori costanti, il tempo viene indicato con x.

L'esperimento ha inizio quando $x = 0$.

IL GHIACCIO ALL'INIZIO

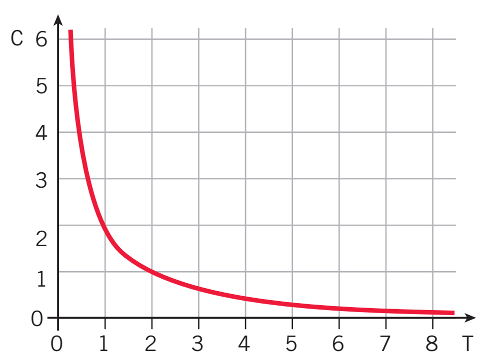
CON IL GHIACCIO TUTTO SCIOLTO



	BICCHIERE 1	BICCHIERE 2
A	$y = b$	$y = ax + b$
B	$y = ax + b$	$y = b$
C	$y = b$	$y = ax$
D	$y = ax$	$y = b$

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2011)

4 Quale delle seguenti equazioni descrive la curva rappresentata nel grafico?



Q e D sono valori costanti.

a. $Q = \dfrac{C}{T} - D$

b. $Q = C \cdot T^2$

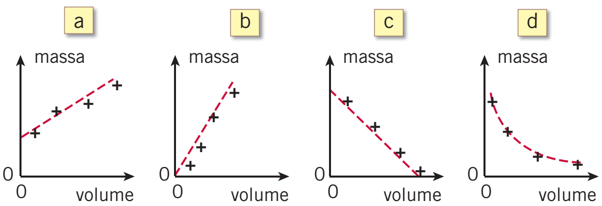
c. $Q = \dfrac{C}{T^2}$

d. $Q = C \cdot T + D$

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2011)

5 In un lavoro in classe si sono misurati la massa e il volume di diversi blocchi fatti con un certo tipo di legno e i valori trovati sono stati riportati in un grafico.

Quale dei grafici ci si aspetta che venga disegnato?



(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2009)

6 In un esperimento si sono misurati i seguenti valori di alcune grandezze: $y = 40 \times 10^{-2}$ cm; $x = 40 \times 10^{-2}$ cm; $g = 9{,}81$ m $\cdot$ s^{-2}; $u = 3$ m $\cdot$ s^{-1}.

Tutte queste grandezze sono legate fra loro da una relazione espressa dalla seguente equazione:

$$\frac{x}{y} = \frac{g(1+k^2)x}{2u^2},$$

dove k è una costante.

In base alla equazione precedente la costante k è misurata in:

a. $m^2 \cdot s^{-2}$

b. $m \cdot s^{-2}$

c. $m^{-2} \cdot s^2$

d. è adimensionale.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2008)

7 In un esperimento sono state prese diverse misure di due grandezze, a e b. I valori trovati sono riportati nella seguente tabella.

a	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
b	0	15	65	135	235	375	550

Dall'analisi dei dati della tabella si può dedurre che una possibile curva che approssima i dati sperimentali ha equazione:

a. b = 60 a

b. b = 75 a

c. $b = \dfrac{7{,}5}{a}$

d. b = 60 a^2

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2005)

8 A seconda della sua velocità un'automobile ha bisogno di più o meno spazio per fermarsi. Nella tabella sono riportati gli spazi d'arresto corrispondenti a diverse velocità di un'automobile.

VELOCITÀ (km/h)	60	100	140	180
SPAZIO D'ARRESTO (m)	14	39	76	126

La relazione tra la velocità v e lo spazio d'arresto s può, in base ai dati, essere rappresentata da una formula. Scegli quella che si adatta di più fra le seguenti, dove k indica un valore che rimane costante al variare di v e di s.

a. $v = \dfrac{k}{s^2}$

b. $v = \dfrac{k}{\sqrt{s}}$

c. $v = ks$

d. $v = k\sqrt{s}$

e. $v = ks^2$

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 1997)

1 L'ENERGIA E LE ALTRE GRANDEZZE FISICHE

Photodynamic/Shutterstock

7. LE DEFINIZIONI OPERATIVE

Nella vita quotidiana, siamo abituati a descrivere gli oggetti in modo discorsivo; in questo tipo di descrizioni, spesso, possiamo esprimere lo stesso concetto anche utilizzando parole diverse e farci capire ugualmente ("La terza via a destra dopo l'edicola", "La terza traversa sulla destra dopo il negozio di giornali").

Parlando di scienza, questo non è più possibile: bisogna prestare moltissima attenzione ai termini che si scelgono, e in ogni caso in questo ambito le semplici affermazioni verbali lasciano sempre un certo margine di incertezza.

Per questa ragione in fisica le grandezze si introducono mediante *definizioni operative*. Una **definizione operativa** di una grandezza è formata da due parti:

- la scelta dello **strumento** di misura che serve per misurare tale grandezza;
- il **protocollo**, cioè la descrizione del procedimento mediante il quale la misura deve essere effettuata.

Per esempio, nella definizione della grandezza fisica «energia» abbiamo indicato

- come **strumento** il contatore dell'azienda elettrica e
- come **protocollo** il fatto di effettuare due letture consecutive sul display dello strumento e poi sottrarre il primo valore letto dal secondo.

13. LA DENSITÀ

Le grandezze unitarie

La densità è una grandezza unitaria, perché dice quanti kg di massa sono contenuti nell'unità di volume (1 m^3): 920 kg/m^3 significa 920 kg di massa in 1 m^3.

Molte sono le grandezze unitarie che incontriamo nella vita quotidiana. Per esempio, il prezzo della frutta dice quanti euro costa un'unità di massa (1 kg) di frutta: 2 €/kg, cioè due euro al kilogrammo.

Tutte le grandezze definite mediante un rapporto tra due altre grandezze sono grandezze unitarie. Lo è anche la velocità, che dice quanti kilometri sono percorsi nell'unità di tempo (1 h): 100 km/h, cioè 100 kilometri all'ora.

14. LE DIMENSIONI FISICHE DELLE GRANDEZZE

In fisica è spesso utile sapere qual è la relazione tra una certa grandezza fisica e le grandezze fondamentali attraverso cui essa è definita.

Le **dimensioni fisiche** di una grandezza indicano in quale modo essa è ottenuta a partire dalle grandezze fondamentali.

Il caso più semplice è quello di grandezze come la distanza D tra due punti, l'altezza h di un palo, lo spessore s di un mobile: tutte queste quantità, benché differenti tra loro dal punto di vista pratico, sono esempi diversi dell'applicazione della stessa grandezza fisica fondamentale: la lunghezza. Ciò si esprime attraverso la notazione:

$$[D] = [h] = [s] = [\mathrm{l}]\,,$$

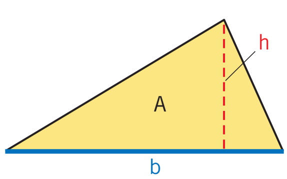
che, a parole, si legge: «la distanza, l'altezza e lo spessore hanno le dimensioni fisiche di una lunghezza».

La scrittura [...] (tra parentesi quadre) significa «dimensioni fisiche di...» e quindi la dimensione fisica della lunghezza si indica con il simbolo [l].

Le dimensioni fisiche delle grandezze fondamentali che già conosciamo sono:

- [t] dimensione fisica di una durata (o del tempo);
- [l] dimensione fisica della lunghezza;
- [m] dimensione fisica della massa.

Un numero puro (come il numero 14, oppure π) non ha dimensioni fisiche, perché non è una grandezza ma un fattore moltiplicativo. I numeri puri non danno contribuito nei *calcoli dimensionali*, come quelli che eseguiremo tra poco.



Per trovare le dimensioni fisiche dell'area si può utilizzare una qualunque delle formule attraverso cui la calcoliamo. Per esempio, nel caso del triangolo abbiamo

$$A = \frac{1}{2}bh,$$

allora le dimensioni fisiche dell'area sono:

$$[A] = \left[\frac{1}{2}bh\right] = \left[\frac{1}{2}\right]\cdot[b]\cdot[h] = [b]\cdot[h] = [\mathrm{l}]\cdot[\mathrm{l}] = [\mathrm{l}^2].$$

L'area ha le dimensioni fisiche di una lunghezza al quadrato, visto che sia la base del triangolo che la sua altezza sono delle lunghezze e il fattore $\frac{1}{2}$ non ha dimensioni fisiche.

Troviamo per esempio le dimensioni fisiche della velocità, utilizzando la formula vista in precedenza:

$$[v] = \left[\frac{D}{t}\right] = \frac{[D]}{[\mathrm{t}]} = \frac{[\mathrm{l}]}{[\mathrm{t}]} = [\mathrm{l}\cdot\mathrm{t}^{-1}].$$

La velocità ha le dimensioni fisiche di una distanza divisa per un tempo (o di una distanza per un tempo elevato alla meno uno).

Le formule fisiche devono essere dimensionalmente corrette, cioè si possono sottrarre o sommare solo quantità con le stesse dimensioni fisiche, e in un'uguaglianza che rappresenta una relazione fisica i due membri devono avere le stesse dimensioni fisiche.

Alla fine di un esercizio, e a maggior ragione di un esercizio complesso, è molto utile controllare le dimensioni fisiche o (in modo equivalente) le unità di misura del risultato ottenuto. Per esempio, se il problema chiede di determinare una lunghezza e il risultato finale non è esprimibile in metri, siamo sicuri che nel procedimento seguito abbiamo commesso un errore.

Dimensioni fisiche e unità di misura

Dalle dimensioni fisiche di una grandezza derivata si può ricavare l'unità di misura.

L'unità di misura di una grandezza derivata si ottiene dalle unità di misura delle grandezze fondamentali da cui è tratta a partire dalla relazione che fornisce le dimensioni fisiche della grandezza stessa.

Per esempio, le dimensioni fisiche della velocità v sono $[v] = [\mathrm{l}]/[\mathrm{t}]$. Ciò significa che le unità di misura della velocità sono date dall'unità di misura della distanza divisa per quella dell'intervallo di tempo.

Così, nel Sistema Internazionale (in cui la distanza si misura in metri e la durata in secondi) l'unità di misura della velocità è m/s (metro al secondo). Però, nella vita quotidiana si misura spesso la distanza in kilometri e la durata in ore: ecco quindi che un'altra unità di misura possibile per la velocità è il kilometro all'ora (km/h).

ESERCIZI

3. LA FISICA

DOMANDE SUI CONCETTI

6 Entra in cucina e guardati intorno.

- Individua un esempio di fenomeno o di applicazione tecnologica per ognuno degli ambiti seguenti della fisica: meccanica, acustica, ottica, termologia, elettromagnetismo.

7 La legge di Archimede permette di spiegare perché una nave sta a galla in mare.

- A quale ambito della fisica appartiene questa legge?

8 In un cantiere navale si sta testando l'utilizzo di una lega di metallo leggero nella costruzione di scafi per barche a vela. Identifica l'ambito della fisica coinvolto in ciascuno dei seguenti test di funzionalità sulla lega metallica:

- effetti di una collisione;
- effetti di caldo e freddo estremi;
- interazione della lega metallica con una bussola.

4. LE GRANDEZZE FISICHE

DOMANDE SUI CONCETTI

13 Puoi descrivere un pallone da basket attraverso alcune sue caratteristiche: il colore, il peso, il diametro, la forma.

- Quali di queste sono grandezze fisiche?

14 Sei nella tua aula, insieme ai tuoi compagni e al professore di fisica. L'aula contiene: i banchi, la cattedra, la LIM, un computer, un certo numero di persone, gli zaini, i radiatori ecc. Inoltre l'aula è formata da muri, pavimento, soffitto, finestre ecc.

- Fai un elenco dettagliato e stabilisci quali sono le grandezze misurabili e quali quelle non misurabili.

Suggerimento: l'altezza dell'aula è misurabile, così come la lunghezza dei capelli delle tue compagne. La bellezza del paesaggio dalle finestre dell'aula non è misurabile…

15 Nel centro urbano di New York, se chiedi dove si trova un luogo che vuoi raggiungere, è normale che un passante ti risponda, per esempio, "Si trova a due isolati (*blocks*) da qui.": una distanza viene comunicata in unità di "isolati" invece che in unità di metri o kilometri. Allo stesso modo, molte ricette usano come unità di misura "i cucchiai di" (farina, zucchero ecc.) invece che i grammi.

- Fai un elenco delle unità di misura che non appartengono al Sistema Internazionale e che vengono usate intorno a te per comunicare distanza, massa, tempo ecc.

16 Quali fra le seguenti qualità di una mela sono misurabili?

Volume, colore, lucentezza, massa, durezza, profumo, sapore.

17 I punteggi assegnati ai partecipanti a una gara di ginnastica artistica esprimono delle grandezze fisiche?

5. IL SISTEMA INTERNAZIONALE DI UNITÀ

DOMANDE SUI CONCETTI

24 Il quintale fa parte del Sistema Internazionale?

25 Tutte le grandezze fondamentali sono definite a partire da un campione di riferimento.

- Fra quelle che conosci, quale ammette ancora un campione di riferimento concreto?

ESERCIZI NUMERICI

29 ★☆☆ Scrivi i nomi dei prefissi e la potenza di 10 corrispondente.

NOME	PREFISSO	POTENZA
M	*mega*	10^6
c		
μ		
m		
h		

9. LA LUNGHEZZA

DOMANDE SUI CONCETTI

51 Quando si passa da metri a millimetri il valore della lunghezza misurata aumenta?

52 Il metro è stato definito come lunghezza di una barra campione, come distanza percorsa dalla luce in un determinato tempo e come frazione assegnata di un meridiano terrestre.

▶ In che ordine temporale sono state introdotte queste tre definizioni?

10. LA MASSA

DOMANDE SUI CONCETTI

63 La massa di una zanzara vale 0,010 g.

▶ Esprimila in mg e in kg, utilizzando se necessario la notazione scientifica.

64 La massa di un protone è $1{,}67 \times 10^{-12}$ pg.

▶ Esprimila in grammi, milligrammi e kilogrammi.

65 La massa di una tonnellata equivale a 1 Mg?

ESERCIZI NUMERICI

69 ★☆☆ Misuri la massa di un libro ponendolo su uno dei due piatti di una bilancia. Ottieni l'equilibrio disponendo sull'altro piatto tre masse da 5 hg, sette masse da 1 g, quattro masse da 1 dg e dodici masse da 1 cg.

▶ Esprimi la massa del libro in grammi.

[1507,52 g]

70 ★☆☆ **FACCIAMO DUE CONTI La Terra e il Sole**

Il Sole e la Terra hanno massa rispettivamente $1{,}989 \times 10^{30}$ kg e $5{,}976 \times 10^{24}$ kg.

▶ Se esistesse una bilancia a bracci uguali di dimensioni cosmiche, quante copie del pianeta Terra occorrerebbero per equilibrare il Sole?

[$3{,}328 \times 10^{5}$]

71 ★☆☆ Su uno dei due piatti di una bilancia è posto un sacco di patate, equilibrato da quattro pacchi di zucchero da 1 kg, un panetto di burro da 250 g, cinque pacchi di pasta da 5 hg e sette uova da 650 dg.

▶ Esprimi in kilogrammi la massa del sacco.

[7,205 kg]

11. L'AREA

ESERCIZI NUMERICI

81 ★☆☆ Un pavimento rettangolare ha la base di 4 m e l'altezza di 3 m. Sul tuo quaderno, usa una scala in cui il lato di un quadretto vale 20 cm.

▶ Disegna il pavimento nella scala scelta.

▶ Costruisci una griglia che evidenzi i metri quadrati che coprono il pavimento.

▶ Conta quanti metri quadrati sono contenuti nel pavimento e confronta il risultato con quello che ottieni moltiplicando la misura della base per quella dell'altezza.

82 ★☆☆ Un appezzamento di terreno rettangolare ha la base lunga 80 m e l'altezza pari a 60 m.

▶ Disegna una mappa del terreno usando una scala in cui 5 m nella realtà corrispondono a 1 cm nel disegno.

▶ Quanto vale (in metri) il perimetro del terreno nella realtà, e quanto è lungo (in centimetri e in metri) il perimetro del rettangolo che hai disegnato?

▶ Di quante volte il perimetro reale è più grande di quello della mappa?

[280 m; 56 cm; 0,56 m; 500 volte]

83 ★★☆ Esegui le seguenti equivalenze:

a. 15 m/s = ___________ km/h = ___________ m/h = ___________ cm/s;

b. 150 km/h = ___________ m/s = ___________ nm/ps = ___________ mm/min.

84 ★★☆ Considera di nuovo il disegno dell'esercizio 82.

▶ Quanto vale (in metri quadrati) l'area del terreno nella realtà, e quanto risulta (in centimetri quadrati e in metri quadrati) l'area del rettangolo che hai disegnato?

▶ Di quante volte l'area reale è più grande di quella della mappa?

▶ Che relazione c'è tra questo risultato e la risposta all'ultima domanda dell'esercizio 82?

[4800 m^2; 192 cm^2; 0,0192 m^2; 250 000 volte]

12. IL VOLUME

DOMANDE SUI CONCETTI

88 Il volume è una grandezza derivata?

89 Un decimetro cubo corrisponde a un decilitro?

90 "Il volume si misura in metri cubi, multipli del metro."

▶ La frase precedente contiene un errore: quale?

ESERCIZI NUMERICI

94 ★☆☆ La cilindrata di un motore, cioè il volume complessivo dei suoi cilindri, è espressa in cc (1 cc = 1 cm^3). Un'auto a quattro cilindri ha una cilindrata di 1200 cc.

▶ Esprimi il volume di ciascun cilindro in litri.

[0,3 L]

95 ★☆☆ In laboratorio devi prelevare da un rubinetto 1,41 L di acqua. Hai a disposizione un cilindro da mezzo litro, un piccolo becher da 12 cL e un cucchiaio da 5 cL.

▶ Quante volte utilizzi il cilindro, il becher e il cucchiaio per ottenere il volume che devi prelevare?

96 ★★☆ In un cilindro graduato sono contenuti 30 mL di acqua. Un secondo cilindro contiene della sabbia fino al livello di 50 cm^3. La sabbia viene versata nell'acqua e si ottiene un volume complessivo di 65 cm^3.

▶ Quanto vale il volume effettivo della sabbia, cioè senza considerare l'aria tra i granelli?

▶ Quanto vale il volume dell'aria tra i granelli?

[35 cm^3; 15 cm^3]

97 ★★☆ Un grande vaso da giardino, a forma di parallelepipedo, ha le dimensioni di 1,5 m, 30 cm e 24 cm. Viene riempito di ghiaia e poi vi si versano 26 L di acqua, che arriva fino all'orlo del vaso.

▶ Calcola il volume della ghiaia.

▶ Qual è il volume dell'aria intrappolata tra i sassolini di ghiaia prima di versare l'acqua?

[82 dm^3; 26 dm^3]

98 ★★☆ Il gallone è una unità di misura di volume che equivale a 4,62 L. Un grosso tino contiene 4,00 hL di vino e un silos 2510 galloni di grano.

▶ Esprimi in m^3 il volume del silos.

▶ Esprimi in galloni il volume del tino.

[11,6 m^3; 86,6 galloni]

13. LA DENSITÀ

ESERCIZI NUMERICI

112 ★☆☆ La densità di popolazione in Toscana è 153 abitanti/km^2. In Toscana risiedono circa 3 519 000 abitanti.

▶ Qual è la superficie della Toscana?

[$2,30 \times 10^4$ km^2]

113 ★☆☆ La soluzione *A* è ottenuta sciogliendo 54 g di sale in 240 mL di acqua; la soluzione *B* è ottenuta sciogliendo 20 g di sale in 50 mL di acqua.

▶ In quale delle due soluzioni è contenuta la maggiore massa di sale?

114 ★☆☆ La legge stabilisce che la concentrazione di monossido di carbonio (CO) nell'aria non deve superare il limite di 10 mg/m^3, altrimenti viene bloccata la circolazione dei veicoli a motore. In 5,6 m^3 di aria si rilevano 45 mg di CO.

▶ È il caso di bloccare la circolazione dei veicoli?

120 ★★☆ In una bottiglia sono contenuti 450 mL di acqua (d = 1012 kg/m^3). Si versano 145 g di olio (d = 920 kg/m^3) nella bottiglia: l'olio non si mescola con l'acqua e forma uno strato sopra di essa.

▶ Calcola il volume raggiunto dai due liquidi sovrapposti.

▶ Calcola la loro massa complessiva.

[608 mL; 600 g]

121 ★★☆ In una siringa, che ha un tappo al posto dell'ago, sono contenuti 7,8 cm^3 di aria quando lo stantuffo è completamente estratto; la densità dell'aria nella siringa risulta 1,4 kg/m^3.

▶ Calcola la massa di aria nella siringa.

▶ Se comprimi lo stantuffo senza far uscire o entrare aria, riducendo il volume a 3,9 cm^3, quanto vale la densità dell'aria in questa nuova situazione?

[0,011 g; 2,8 kg/m^3]

122 ★★☆ Una bombola è riempita con 6,3 g di gas metano alla densità di 0,82 kg/m^3.

▶ Calcola il volume della bombola.

▶ Se successivamente vengono aggiunti altri 9,0 g di metano, calcola la densità finale del gas.

[7,7 L; 1,99 kg/m^3]

14. LE DIMENSIONI FISICHE DELLE GRANDEZZE

DOMANDE SUI CONCETTI

126 Due grandezze fisiche *A* e *B* hanno dimensioni diverse.

▶ La grandezza $A - B$ ha senso dal punto di vista fisico? Perché?

▶ E la grandezza $\frac{A}{B}$? Fai un esempio di grandezza fisica dotata di senso ottenuta come rapporto di due grandezze fisiche.

ESERCIZI NUMERICI

127 ★☆☆ La celebre formula di Einstein che esprime l'equivalenza massa-energia è $E = mc^2$, dove c indica la velocità della luce nel vuoto.

▶ Determina le dimensioni fisiche dell'energia a partire da questa formula.

[$\mathrm{m} \cdot \mathrm{l}^2 \cdot \mathrm{t}^{-2}$]

128 ★☆☆ La definizione della densità d è data dalla formula ($d = m/V$).

▶ Trova le dimensioni fisiche della densità.

▶ Dalle dimensioni fisiche, ricava l'unità di misura della densità.

[$\mathrm{m} \cdot \mathrm{l}^{-3}$]

129 ★★☆ Considera quattro grandezze fisiche: una massa m, un tempo t, una velocità v, una densità d.

▶ Costruisci una formula combinando queste grandezze in modo da ottenere una quantità adimensionale.

[$m / d \cdot v^3 \cdot t^3$]

130 ★★☆ Le dimensioni fisiche del volume di una sfera sono date da [l^3].

▶ Da questa informazioni puoi ricavare la formula corretta che esprime il volume della sfera? Perché?

131 ★★☆ Durante una verifica di fisica, per risolvere un problema uno studente usa la formula $s = at^2$, dove s è la distanza percorsa da un'auto che accelera, a l'accelerazione dell'auto, che nel Sistema Internazionale si misura in $\mathrm{m/s^2}$, e t il tempo trascorso. Lo studente non è sicuro che la formula sia corretta.

▶ Determina se la relazione può essere valida controllando le dimensioni fisiche delle grandezze coinvolte.

▶ Puoi stabilire con certezza che la formula è corretta? Perché?

PROBLEMI GENERALI

8 ★★☆ La lega è un'antica unità di lunghezza, ora del tutto in disuso, pari a 5555 m. Due città distano 100 km l'una dall'altra.

▶ Qual è la distanza espressa in leghe tra le due città?

▶ Un cavallo percorre 1 lega in 30 minuti. Quanto tempo impiega per coprire la distanza tra le due città?

[18,0 leghe; 9 h]

9 ★★☆ Una pompa di bicicletta è formata essenzialmente da un cilindro di diametro 2,0 cm e lungo 30 cm. Un ciclista gonfia una ruota pompando a un ritmo di 25 volte al minuto.

▶ Qual è il volume di aria pompato ogni volta?

▶ Qual è il volume di aria pompato al secondo?

▶ Il volume di aria pompato ogni secondo è una grandezza unitaria?

▶ Supponiamo che l'aria pompata nella ruota sia compressa alla metà del suo volume di partenza. Qual è il rapporto tra la densità dell'aria nella pompa prima della compressione e quella nella ruota?

[$9{,}4 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3}$; $2{,}35 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$; $3{,}9 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3/s}$; 0,5]

10 ★★☆ Il raggio del pianeta Giove è $7{,}14 \times 10^7$ m e la sua massa vale $1{,}900 \times 10^{27}$ kg.

▶ Calcola l'area della superficie di Giove, considerandolo di forma sferica.

▶ Calcola la densità di Giove, considerandolo di forma sferica.

[$6{,}40 \times 10^{16}\ \mathrm{m^2}$; $1{,}25 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$]

16 ★★★ Nel sito internet di presentazione della nuova FIAT Panda turbo a benzina leggi un consumo urbano di 4,8 L/100 km. Sullo stesso sito, la nuova FIAT Panda ad alimentazione bifuel (metano-benzina), presenta consumi urbani pari a 7,6 $\mathrm{m^3}$/100 km per il gas metano e 7,7 L/100 km per la benzina.

▶ Quanti km percorrono le due auto per unità di combustibile?

▶ L'energia fornita da un litro di benzina è 10 kWh/L. Ogni giorno, per andare al lavoro, percorri in totale 50 km in parte dentro la città e in parte in zona extraurbana e stai pensando di acquistare una nuova auto. I consumi misti (cioè su percorsi urbani ed extraurbani) sono di 4,1 L/100 km per la Panda turbo e di 6,0 L/100 km per quella bifuel alimentata a benzina. Quanti litri ti servono per andare al lavoro ogni giorno?

▶ Quanta energia consumeresti in un giornata di lavoro con ognuno dei due modelli?

▶ La benzina costa 1, 753 €/L . Quanto spenderesti ogni giorno con ciascuno dei due modelli di Fiat Panda se viaggiassi sempre a benzina?

[20,8 km/L; 13,2 km/$\mathrm{m^3}$, 13,0 km/L; 2,05 L; 3,0 L; 20,5 kWh/d; 30 kWh/d; 3,6 €; 5,3 €]

17 ★★★ Il costo della benzina è di 1,48 euro al litro, mentre la sua densità è 0,72 kg/dm^3.

▶ Quanto vale il volume occupato da 1 kg di benzina?

▶ Se hai 10 euro, quanti kg di benzina puoi acquistare?

[1,39 L; 4,86 kg]

18 ★★★ Sull'etichetta di una bottiglia di acqua minerale leggi il dato: residuo fisso 210 mg/L. Il residuo fisso è la massa di sali che rimane allo stato solido dopo l'evaporazione di un litro di acqua.

▶ Quale massa di sali è sciolta nell'acqua di un pentolino contenente 789 mL di acqua?

▶ Se si vuole fare in modo di non ingerire più di 0,30 g di sale proveniente dall'acqua al giorno, quanti litri di quella particolare acqua minerale si possono bere al massimo?

[166 mg; 1,4 L]

19 ★★★ Nel negozio *A* il latte viene venduto a 0,99 euro al litro, mentre nel negozio *B* viene venduto a 0,98 euro al kilogrammo. La densità del latte è di 1,03 kg/dm^3.

▶ Quale volume è occupato da 1 kg di latte?

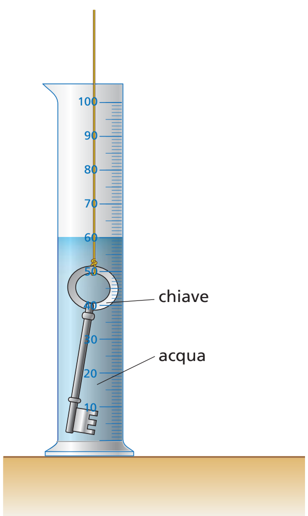
▶ Qual è il prezzo di un litro di latte nel negozio *B*?

▶ In quale dei due negozi il latte è più conveniente?

[0,97 L; 1,01 euro/L; nel negozio *A*]

GIOCHI DI ANACLETO

7 Uno studente usa un cilindro graduato per misurare il volume di una chiave di cui si conosce la massa: 160 g. Di seguito è raffigurato il cilindro contenente la chiave in cui sono stati versati 40 cm^3 di acqua.



▶ Qual è la stima migliore della densità del materiale di cui è fatta la chiave?

a. 0,13 g/cm^3.

b. 0,25 g/cm^3.

c. 2,7 g/cm^3.

d. 8,0 g/cm^3.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 1996)

8 Qual è il valore approssimativo della massa di una normale matita di legno nuova?

a. 5×10^{-5} kg.

b. 5×10^{-3} kg.

c. 5×10^{-2} kg.

d. 5×10^{-1} kg.

e. 5×10^{0} kg.

(Tratto dalle *Olimpiadi della Fisica*, anno 2013)

9 Qual è, tra le seguenti, quella che approssima meglio la capienza di un cucchiaio da minestra?

a. $1,2\times10^{-3}$ m^3.

b. 120 mL.

c. 12×10^{-3} L.

d. 1,2 cm^3.

e. $0,12\times10^{-3}$ dm^3.

(Tratto dalle *Olimpiadi della Fisica*, anno 2012)

10 Nelle seguenti equazioni i simboli *a*, *b*, *c*, *d* rappresentano grandezze fisiche: *a* è misurato in m, *b* in s, *c* in m/s e *d* in m/s^2. Una sola delle equazioni è dimensionalmente corretta, quale?

a. $a = b^2 c / 2$.

b. $b = a^2 / c$.

c. $c^2 = da$.

d. $a = dc$.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2011)

JLR Photography/Shutterstock

4. L'ERRORE STATISTICO

Supponiamo di misurare 50 volte l'intervallo di tempo Δt impiegato da una pallina a scendere dal balcone del terzo piano. Il cronometro utilizzato ha una sensibilità di 0,01 s. I valori raccolti (espressi in secondi) sono elencati nella tabella.

TEMPI DI CADUTA (s)									
1,26	1,30	1,29	1,41	1,44	1,38	1,42	1,15	1,49	1,23
1,37	1,59	1,42	1,33	1,15	1,35	1,37	1,31	1,41	1,35
1,28	1,30	1,31	1,26	1,32	1,45	1,40	1,33	1,34	1,41
1,39	1,27	1,41	1,25	1,31	1,45	1,19	1,39	1,41	1,27
1,46	1,34	1,44	1,37	1,35	1,30	1,35	1,53	1,32	1,52

Puoi controllare che il valore medio dei dati sperimentali è $\bar{x} = 1,35$ s. Inoltre il valore massimo che compare nei dati è $x_{\max} = 1{,}59$ s, mentre il valore minimo è $x_{\min} = 1{,}15$ s. L'errore massimo sulla misura è quindi

$$e_m = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \frac{1,59\,s - 1,15\,s}{2} = 0,22\,\mathrm{s}\,.$$

Poiché l'errore massimo cade già sulla prima cifra dopo la virgola (2 decimi di secondo) non ha senso scrivere il valore medio del tempo calcolato con due cifre decimali. Perciò il valore medio del tempo, arrotondato a una cifra decimale, vale 1,4 s. Inoltre, dobbiamo approssimare anche il valore dell'errore ed esprimerlo con la stessa precisione con cui conosciamo il tempo medio.

Il risultato della misura si scrive in modo corretto come

$$\Delta t = (1{,}4 \pm 0{,}2)\ \mathrm{s}$$

e la precisione dell'esperimento è data dall'errore relativo

$$e_r = \frac{e_m}{\bar{x}} = \frac{0{,}2\ \mathrm{s}}{1{,}4\ \mathrm{s}} = 0{,}14.$$

Con questo metodo, il valore che abbiamo trovato per Δt ha un errore relativo percentuale del 14%.

Però, quando abbiamo a disposizione un numero abbastanza grande di dati sperimentali possiamo dare una valutazione dell'incertezza più precisa di quella che si ottiene indicando l'errore massimo; vediamo di cosa si tratta.

L'istogramma dei dati

Per visualizzare meglio i dati sperimentali, disegniamo un *istogramma*. Per prima cosa dividiamo i valori dei tempi in dieci intervalli di ampiezza 0,05 s, cominciando dal valore (arbitrario ma ragionevole, tenendo conto dei dati raccolti) di 1,12 s, e contiamo quanti valori contenuti nella tabella appartengono a ognuno degli intervalli così costruiti.

SUDDIVISIONE DEI DATI IN INTERVALLI

Intervallo	Numero di dati	Intervallo	Numero di dati
$1{,}12\ \mathrm{s} \leq \Delta t < 1{,}17\ \mathrm{s}$	2	$1{,}37\ \mathrm{s} \leq \Delta t < 1{,}42\ \mathrm{s}$	12
$1{,}17\ \mathrm{s} \leq \Delta t < 1{,}22\ \mathrm{s}$	1	$1{,}42\ \mathrm{s} \leq \Delta t < 1{,}47\ \mathrm{s}$	7
$1{,}22\ \mathrm{s} \leq \Delta t < 1{,}27\ \mathrm{s}$	4	$1{,}47\ \mathrm{s} \leq \Delta t < 1{,}52\ \mathrm{s}$	1
$1{,}27\ \mathrm{s} \leq \Delta t < 1{,}32\ \mathrm{s}$	10	$1{,}52\ \mathrm{s} \leq \Delta t < 1{,}57\ \mathrm{s}$	2
$1{,}32\ \mathrm{s} \leq \Delta t < 1{,}37\ \mathrm{s}$	10	$1{,}57\ \mathrm{s} \leq \Delta t < 1{,}62\ \mathrm{s}$	1

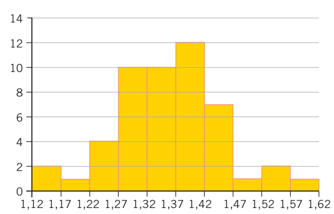
I valori numerici così ottenuti sono rappresentati nell'**istogramma** della figura, in cui l'altezza di ogni colonna disegnata su un intervallo di valori è proporzionale al numero di dati sperimentali che è compreso in tale intervallo.

L'istogramma mostra in modo immediato che i dati sperimentali non sono distribuiti a caso tra il valore minimo e il valore massimo, ma tendono a essere molto più numerosi nella zona che circonda il valore medio. Ciò è dovuto agli errori casuali, che tendono sia ad aumentare che a diminuire il risultato della misura.

I dati sperimentali più significativi sono quelli rappresentati nel «picco» dell'istogramma. I valori che si trovano ai bordi sono meno significativi.

VALUTARE GLI ERRORI CASUALI

Se abbiamo a disposizione una sola misura, non abbiamo alcun modo di sapere se essa è affetta da un errore casuale grande o piccolo. Soltanto ripetendo la misura molte volte possiamo farci un'idea di come gli errori casuali influiscono sui risultati.

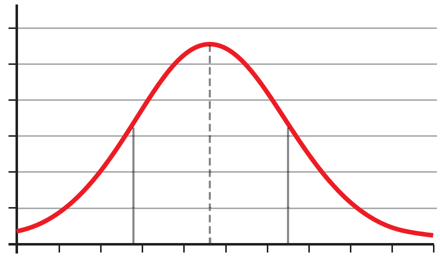


La curva di Gauss

Pensiamo ora di aumentare moltissimo sia il numero delle misure sia il numero degli intervalli dell'istogramma. Nella *teoria statistica* degli errori casuali si dimostra che, in tale condizione, praticamente tutte le distribuzioni di dati tendono ad assumere la stessa forma, data dalla curva a campana o curva di Gauss.

A La curva di Gauss relativa ai dati sperimentali della tabella è centrata attorno al valore medio $\bar{x}$ delle misure effettuate. La differenza tra il valore medio $\bar{x}$ e il valore x si chiama **scarto** di x.

B Il 68,3% delle misure effettuate è compreso tra i valori $\bar{x} - \sigma$ e $\bar{x} + \sigma$, dove σ è detta **scarto quadratico medio**.



Indicando con $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gli n risultati sperimentali raccolti, il valore dello scarto quadratico medio si calcola con la formula

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}. \tag{5}$$

Quando le misure sono numerose, è possibile la trattazione statistica dei dati sperimentali e si sceglie come valore dell'incertezza lo scarto quadratico medio σ.

In pratica, con questa scelta si afferma che i dati sperimentali minori di $\bar{x} - \sigma$ o maggiori di $\bar{x} + \sigma$ sono soltanto un terzo del totale.

Se calcoliamo con la formula precedente il valore dello scarto quadratico medio per i 50 dati sperimentali che stiamo esaminando, otteniamo il valore $\sigma = 0{,}09$ s, che è meno della metà dell'errore massimo $e_m = 0{,}22$ s relativo agli stessi dati. Dopo questa analisi, il risultato della misura si può scrivere

$$\Delta t = (1{,}35 \pm 0{,}09)\,\text{s}.$$

Con questo metodo, si trova uno scarto quadratico percentuale del 7% circa (infatti 0,09 s/1,35 s = 0,07).

ERRORE ASSOLUTO

Lo scarto quadratico medio e l'errore massimo sono esempi di **errori assoluti**, cioè incertezze espresse in modo da avere la stessa unità di misura della grandezza misurata. Invece, gli **errori relativi** sono espressi sotto forma di numeri puri (senza unità di misura).

6. DIMOSTRAZIONI DELLE FORMULE SULLE INCERTEZZE

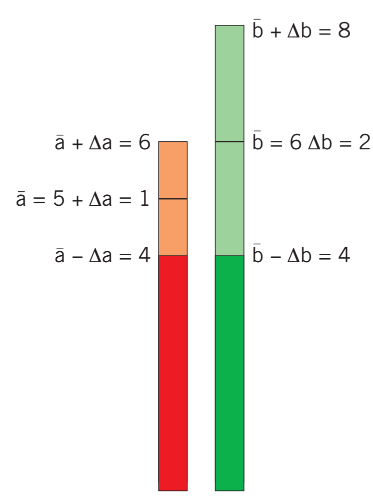
In questo paragrafo dimostriamo le formule **(6)** e **(7)** del paragrafo precedente.

Dimostrazione dell'incertezza sulla somma

Indichiamo con $\bar{a}$ e $\bar{b}$ i valori misurati per le grandezze a e b. Tenendo conto degli errori Δa e Δb, il valore sperimentale della grandezza a può variare tra $\bar{a} - \Delta a$ e $\bar{a} + \Delta a$, mentre quello di b è compreso tra $\bar{b} - \Delta b$ e $\bar{b} + \Delta b$.

Consideriamo ora la grandezza x, somma di a e di b: $x = a + b$. Il massimo valore di x, x_{max}, si ottiene prendendo i valori più grandi di a e di b, cioè $\bar{a} + \Delta a$ e $\bar{b} + \Delta b$:

$$x_{max} = \bar{a} + \Delta a + \bar{b} + \Delta b.$$



Il minimo valore di x, $x_{\min}$, si ha scegliendo i valori più piccoli di a e di b, cioè $\bar{a} - \Delta a$ e $\bar{b} - \Delta b$:

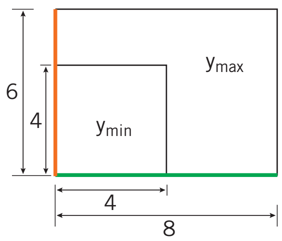
$$x_{\min} = \bar{a} - \Delta a + \bar{b} - \Delta b.$$

L'errore massimo $\Delta(a+b)$ su x è allora dato dalla formula **(2)**:

$$\Delta(a+b) = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \frac{\bar{a} + \Delta a + \bar{b} + \Delta b - (\bar{a} - \Delta a + \bar{b} - \Delta b)}{2} =$$
$$= \frac{\cancel{\bar{a}} + \cancel{\bar{b}} - \cancel{\bar{a}} - \cancel{\bar{b}} + \Delta a + \Delta b + \Delta a + \Delta b}{2} = \frac{2\Delta a + 2\Delta b}{2} = \Delta a + \Delta b.$$

Abbiamo così dimostrato che $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$. Con un procedimento analogo si dimostra anche la seconda delle formule **(6)**.

Dimostrazione dell'incertezza sul prodotto



Consideriamo una nuova grandezza y, prodotto di a e di b: $y = a \cdot b$. Il massimo valore di y, $y_{\max}$, si ha scegliendo i valori più grandi di a e di b, cioè $\bar{a} + \Delta a$ e $\bar{b} + \Delta b$:

$$y_{\max} = (\bar{a} + \Delta a) \cdot (\bar{b} + \Delta b).$$

Il minimo valore di y, $y_{\min}$, si ha scegliendo i valori più piccoli di a e di b, cioè $\bar{a} - \Delta a$ e $\bar{b} - \Delta b$:

$$y_{\min} = (\bar{b} - \Delta b) \cdot (\bar{b} - \Delta b).$$

Calcoliamo prima

$$y_{\max} = (\bar{a} + \Delta a) \cdot (\bar{b} + \Delta b) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b \cong$$
$$\cong \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a.$$

Nella formula precedente abbiamo trascurato il termine $\Delta a \cdot \Delta b$: infatti, in generale gli errori Δa e Δb sono molto più piccoli dei valori misurati $\bar{a}$ e $\bar{b}$. Quindi il termine $\bar{a} \cdot \bar{b}$ è il più grande, seguito dai prodotti $\bar{a} \cdot \Delta b$ e $\bar{b} \cdot \Delta a$; infine, il prodotto $\Delta a \cdot \Delta b$ è ancora più piccolo e, quindi, trascurabile.
Con un procedimento analogo si ricava la formula

$$y_{\min} \cong \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \Delta b - \bar{b} \cdot \Delta a.$$

Siamo ora in grado di calcolare l'incertezza sul prodotto:

$$\Delta(a \cdot b) = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a - (\bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \Delta b - \bar{b} \cdot \Delta a)}{2} =$$
$$= \frac{\bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a + \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a}{2} = \frac{2\bar{a} \cdot \Delta b + 2\bar{b} \cdot \Delta a}{2} =$$
$$= \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a.$$

Abbiamo così ottenuto il valore dell'incertezza sul prodotto di due valori:

$$\Delta(a \cdot b) = \bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a. \qquad \textbf{(9)}$$

Dividendo i due membri dell'equazione **(9)** per $\bar{a} \cdot \bar{b}$ otteniamo la formula **(7)** per il prodotto:

$$\frac{\Delta(a \cdot b)}{\bar{a} \cdot \bar{b}} = \frac{\bar{a} \cdot \Delta b + \bar{b} \cdot \Delta a}{\bar{a} \cdot \bar{b}} = \frac{\cancel{\bar{a}} \cdot \Delta b}{\cancel{\bar{a}} \cdot \bar{b}} + \frac{\cancel{\bar{b}} \cdot \Delta a}{\bar{a} \cdot \cancel{\bar{b}}} = \frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}.$$

In modo simile, si dimostra anche la formula per il quoziente.

8. LE LEGGI SPERIMENTALI

Gli *esperimenti* permettono di controllare in modo concreto qual è la relazione che lega tra loro due o più grandezze fisiche.

In diversi casi l'esperimento ci fornisce le prime informazioni su fenomeni e leggi fisiche fino a quel momento sconosciute. Un esempio è dato dagli esperimenti condotti attorno al 1790 da Charles Augustin de Coulomb per studiare le caratteristiche della forza che si esercita tra cariche elettriche: tale esperimento ha fornito i dati di base, partendo dai quali (con il contributo di moltissimi altri esperimenti) si è costruita la complessa teoria dell'elettromagnetismo.

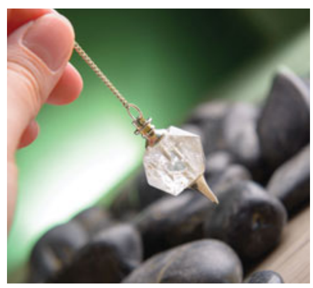
La legge di Coulomb, che fornisce il valore della forza che agisce tra due cariche elettriche puntiformi, è un esempio di **legge sperimentale**, cioè di una regolarità ricavata dallo sperimentatore e, al momento della sua scoperta, non deducibile da considerazioni teoriche.

In altri casi, all'opposto, l'esperimento è utilizzato per controllare la validità di una struttura teorica preesistente. L'esempio più complesso e più spettacolare in questo senso è stato, il 4 luglio 2012, l'annuncio dell'osservazione della particella di Higgs.

Tale particella era stata introdotta, su basi puramente teoriche, nel 1964 dal fisico britannico Peter Higgs e da altri. A distanza di 48 anni, la sua esistenza è stata provata al CERN (Organizzazione Europea per la Ricerca Nucleare) di Ginevra grazie agli esperimenti ATLAS e CMS. Essi coinvolgono migliaia di ricercatori e sfruttano tecnologie di avanguardia spesso messe a punto appositamente per essere utilizzate al CERN.

Un esempio: il pendolo

Un pendolo è essenzialmente un filo leggerissimo appeso a un punto fisso (per esempio a un gancetto) e a cui è appeso un oggetto massivo, come il dado di un bullone.



michelaubryphoto/Shutterstock

Anche un oggetto semplice come un pendolo può avere un ruolo importante nella fisica, per esempio perché permette di verificare la validità dei princìpi della dinamica, enunciati da Newton, che sono alla base di tutta la nostra conoscenza della meccanica.

Infatti (come si vede più avanti in questo corso), sulla base del secondo principio della dinamica e di considerazioni geometriche si dimostra che

> il periodo di oscillazione di un pendolo, cioè la durata di una sua oscillazione completa, è direttamente proporzionale alla radice quadrata della sua lunghezza.

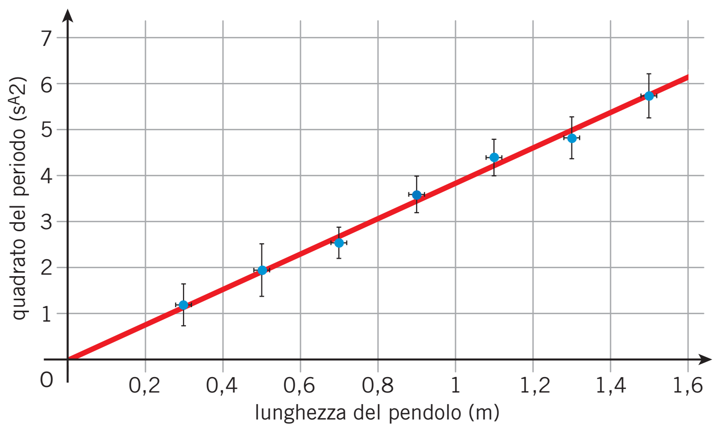
Se l'esperimento conferma questa legge, in modo indiretto è verificata anche la validità dei princìpi della dinamica, da cui la legge è dedotta. Il successo di moltissimi esperimenti, sulle tematiche più varie (dalla caduta degli oggetti al moto dei pianeti e delle sonde spaziali), è alla base della fiducia che i fisici hanno nella validità dei princìpi della dinamica.

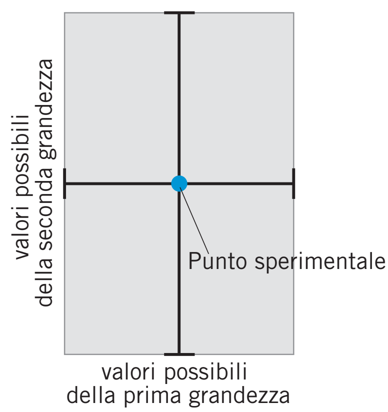
Per eseguire l'esperimento, misuriamo il periodo di un pendolo cambiando più volte la sua lunghezza e facendo per ogni lunghezza l dieci misure del periodo T. I risultati dell'esperimento sono contenuti nella tabella seguente.

DATI SPERIMENTALI			
N. prova	l (m)	T (s)	T^2 (s^2)
1	1,50 ± 0,02	2,4 ± 0,1	5,8 ± 0,5
2	1,30 ± 0,02	2,2 ± 0,1	4,8 ± 0,4
3	1,10 ± 0,02	2,1 ± 0,1	4,4 ± 0,4
4	0,90 ± 0,02	1,9 ± 0,1	3,6 ± 0,4
5	0,70 ± 0,02	1,6 ± 0,1	2,6 ± 0,3
6	0,50 ± 0,02	1,4 ± 0,2	2,0 ± 0,6
7	0,30 ± 0,02	1,1 ± 0,2	1,2 ± 0,4

Nell'ultima colonna della tabella compare T^2. L'errore su T^2 è calcolato nel modo illustrato nell'Esempio alla fine del paragrafo 5.

Questi dati sperimentali sono riportati nella figura seguente. Nel grafico le coppie di dati sperimentali sono rappresentate come punti che hanno per ascissa il valore di l e per ordinata quello di T^2.





La figura mostra anche le barre di errore, che indicano qual è il valore dell'incertezza sulla misura delle grandezze. Per esempio, la barra di errore verticale del primo punto in basso a sinistra è lunga 0,4 s^2 sia verso l'alto, sia verso il basso, perché questo è il valore dell'incertezza per tale dato. Questa barra mostra, quindi, che il primo valore di T^2 è compreso tra 0,8 s^2 e 1,6 s^2.

Allo stesso modo la barra di errore orizzontale dello stesso punto abbraccia tutti i valori di l compatibili con la precisione dei nostri dati, cioè quelli compresi tra 0,28 m e 0,32 m.

Quindi, mediante le barre di errore a ogni valore sperimentale corrisponde un rettangolo, che è centrato nel punto sperimentale trovato e comprende tutti i valori della coppia di grandezze (l, T^2) che sono compatibili con la misura effettuata.

Analisi del grafico sperimentale

Secondo la legge che dobbiamo verificare, la lunghezza l deve essere direttamente proporzionale a T^2. Sulla base di ciò, se non esistessero errori di misura, la linea che connette tutti i punti sperimentali dovrebbe essere una retta passante per l'origine.

Ma noi non sappiamo qual è il valore «vero» di l e di T^2; sappiamo solo che esso è compreso tra il valore medio meno l'incertezza e il valore medio più l'incertezza. Così, ciò che importa è che esista una retta che «taglia» tutti i rettangoli definiti dalle barre di errore.

Se esiste una retta che attraversa i rettangoli definiti dalle barre di errore l'esperimento conferma (entro gli errori di misura) la previsione teorica.

Nella figura precedente, la linea rossa è calcolata con un procedimento matematico che fornisce la retta che approssima al meglio possibile i dati sperimentali.

La previsione che stavamo indagando risulterebbe falsa se nel grafico comparissero uno o più punti sperimentali posti in modo tale che nessuna retta può intersecare tutti i rettangoli. In questo caso si controllano i dati per escludere errori banali e si possono ripetere le misure per escludere eventuali errori sperimentali. Ma se si conferma che nessuna retta è compatibile con i dati raccolti, la legge fisica proposta è dichiarata falsa dall'esperimento.

ESERCIZI

1. GLI STRUMENTI DI MISURA

DOMANDE SUI CONCETTI

1 In una località di montagna un altimetro rileva la quota di 1234 m.

▶ Qual è la sensibilità dello strumento?

2 In quale caso uno strumento di misura può rompersi se viene usato per misurare il valore di una grandezza?

3 Il contatore di consumi dell'energia elettrica che hai a casa è uno strumento analogico o digitale?

4 La precisione di uno strumento dipende dall'abilità dello sperimentatore?

ESERCIZI NUMERICI

5 ★ Indica la portata e la sensibilità del cilindro, tarato in centimetri cubi.

David J. Green – studio/Alamy

3. IL VALORE MEDIO E L'INCERTEZZA

DOMANDE SUI CONCETTI

17 Hai eseguito una serie di misure della lunghezza della tua scrivania. Hai scritto il risultato ottenuto accompagnato dalla sensibilità del metro utilizzato, e hai espresso la tua misura in cm.

▶ Qual è l'unità di misura della relativa incertezza percentuale?

18 È più precisa la misura (24,5 ± 0,5)cm o la misura (98 ± 1)cm?

ESERCIZI NUMERICI

25 ★★ Una montagna è alta 2150 m. La sua altezza è nota con un'incertezza di 5 m.

▶ Scrivi l'altezza della montagna con l'incertezza relativa.

▶ Un alpinista raggiunge la cima e vi pone una pila di sassi alta 0,5 m. Come si modifica la scrittura dell'altezza della montagna?

[invariata]

26 ★★ La medaglia d'oro olimpica a Londra 2012 per il salto in alto maschile è stata vinta da Ivan Ukhov, famoso per essersi presentato ubriaco al meeting di atletica di Losanna nel 2008, pare dopo un litigio con la fidanzata. La classifica dei 14 finalisti è stata:

1	I. Ukhov, Russia	2,38 metri
2	E. Kynard, Stati Uniti	2,33 metri
3	M. Barshim, Qatar	2,29 metri
4	D. Drouin, Canada	2,29 metri
5	R. Grabarz, Gran Bretagna	2,29 metri
6	J. Nieto, Stati Uniti	2,29 metri
7	B. Bondarenko, Ucraina	2,29 metri
8	M. Mason, Canada	2,29 metri
9	A. Protsenko, Ucraina	2,25 metri
10	J. Williams, Stati Uniti	2,25 metri
11	W. Miller, Colombia	2,25 metri
12	A. Silnov, Russia	2,25 metri
13	K. Ioannou, Cipro	2,20 metri
14	M. Hanany Francia	2,20 metri

▶ Quanto vale l'altezza media saltata durante questa finale olimpica?

▶ Scrivi il risultato con l'incertezza della misura.

[2,27 m; 0,01 m]

27 ★★ Vuoi imbiancare la tua stanza e hai chiesto al tuo migliore amico di aiutarti a misurare l'altezza del soffitto. Tu hai ottenuto 2,80 m e il tuo amico 2,81 m. Il metro a nastro utilizzato ha una sensibilità di 1 cm.

▶ Come scrivi il risultato della misura con l'incertezza associata?

[(2,805 ± 0,005) m]

28 ★★ Una bilancia analogica misura la massa con un'incertezza relativa percentuale del 15%. La massa complessiva di una cassetta colma di frutta misurata con questa bilancia è di 5,0 kg, mentre la tara è di 0,7 kg.

▶ Come si esprimono queste misure in modo corretto con la rispettiva incertezza?

▶ La bilancia viene letta da un altro osservatore che non si posiziona esattamente di fronte alla scala graduata. Il valore misurato per la massa della cassetta è diverso dal precedente, per difetto o per eccesso a seconda della sua posizione. Perché?

[(5,0 ± 0,8) kg; (0,7 ± 0,1) kg]

4. L'ERRORE STATISTICO

DOMANDE SUI CONCETTI

32 "In laboratorio, dopo aver effettuato due misure del diametro di un filo di rame, fai l'analisi statistica dei dati sperimentali e traccia la curva a campana di Gauss che ne fornisce la distribuzione." Cosa c'è di sbagliato in questa frase?

33 Come diventa lo scarto quadratico medio se i risultati di una misura sono molto lontani dal valore medio?

ESERCIZI NUMERICI

34 ★★ **PROBLEMA SVOLTO**

La massa del lingotto

Pics-xl/Shutterstock

Misuriamo, per 20 volte consecutive, la massa di un lingotto con una bilancia di sensibilità 0,1 g.

Ecco i valori ottenuti espressi in grammi:

200,5; 200,6; 200,3; 200,1; 200,5; 200,3; 200,6; 200,4; 200,4; 200,5; 200,4; 200,8; 200,5; 200,3; 200,4; 200,4; 200,5; 200,5; 200,4; 200,8.

- ▶ Suddividi le misure in classi di frequenza.
- ▶ Calcola lo scarto quadratico medio.
- ▶ Calcolare lo scarto quadratico percentuale.
- ▶ Calcolare l'errore massimo e confrontalo con lo scarto quadratico medio.
- ▶ Esprimi il risultato della misura in maniera corretta.

DATI E INCOGNITE

	GRANDEZZE	SIMBOLI	VALORI (g)
DATI	Massa	M	200,5; 200,6; 200,3; 200,1; 200,5; 200,3; 200,6; 200,4; 200,4; 200,5; 200,4; 200,8; 200,5; 200,3; 200,4; 200,4; 200,5; 200,5; 200,4; 200,8
	Numero delle misure	n	20
INCOGNITE	Scarto quadratico medio	σ	?
	Scarto quadratico percentuale	$\sigma\%$	?
	Errore massimo	e_m	?

RAGIONAMENTO

- Per affrontare il calcolo dello scarto quadratico medio è opportuno raggruppare le misure in classi di frequenza tramite una tabella.
- Successivamente, in un'altra tabella, calcoliamo per ogni misura, lo scarto s_i e lo scarto quadratico. Quindi lo scarto quadratico medio sarà: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i s_i^2}{n}}$.
- L'errore relativo sarà dunque: $\sigma\% = \frac{\sigma}{M_m}\%$, dove M_m indica la media delle misure.
- L'errore massimo è: $e_m = \frac{M_{max} - M_{min}}{2}$.
- Infine il risultato verrà espresso come: $M = M_m \pm \sigma$.

RISOLUZIONE

TABELLA DELLE CLASSI DI FREQUENZA

CLASSE	1	2	3	4	5	6
VALORE	200,1 g	200,3 g	200,4 g	200,5 g	200,6 g	200,8 g
FREQUENZA	1	3	6	6	2	2

Calcolo del valore medio: $$M_m = \frac{\sum_i^n M_i}{n} = 200{,}5\ \text{g}$$

TABELLA DEGLI SCARTI

M_i (g)	f	$M_i \times f$ (g)	s_i (g)	s_i^2 (g^2)	$f \times s_i^2$ (g^2)
200,1	1	200,1	0,3	0,09	0,09
200,3	3	600,9	0,1	0,01	0,03
200,4	6	1202,4	0	0	0
200,5	6	1203,0	0,1	0,01	0,06
200,6	2	401,2	0,2	0,04	0,08
200,8	2	401,6	0,4	0,16	0,32
TOTALE	20				0,58

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}58\ \text{g}^2}{20}} = 0{,}2\ \text{g}$$

$$e_m = \frac{M_{\text{max}} - M_{\text{min}}}{2} = \frac{(200{,}8 - 200{,}1)\ \text{g}}{2} = 0{,}4\ \text{g}$$

$$\sigma\% = \frac{\sigma}{M_m} = \frac{0{,}2\ \text{g}}{200{,}5\ \text{g}} = 0{,}1\%$$

$$M = M_m \pm \sigma = (200{,}5 \pm 0{,}2)\text{g}.$$

CONTROLLO DEL RISULTATO

Abbiamo ottenuto che $e_m > \sigma$. Quando abbiamo un insieme abbastanza esteso di dati sperimentali, lo scarto quadratico medio ci fornisce infatti una valutazione dell'incertezza più precisa rispetto all'errore massimo.

35 ★★☆ Con un cronometro di sensibilità 0,01 s, si misura il periodo di un pendolo. La misura è stata ripetuta 15 volte e si sono ottenuti i seguenti valori:

MISURA	VALORE (s)
1	1,90
2	1,87
3	1,85
4	1,92
5	1,88
6	1,85
7	1,91
8	1,89
9	1,93
10	1,86
11	1,92
12	1,86
13	1,90
14	1,91
15	1,84

▶ Calcola il valore medio del periodo del pendolo.

▶ Calcola lo scarto quadratico medio.

▶ Esprimi correttamente il risultato della misura.

[1,89 s; 0,03 s; (1,89 ± 0,03) s]

36 ★★☆ Con un distanziometro si misura la lunghezza di un'asta metallica. Nella tabella sono riportati (in m) i risultati ottenuti:

MISURA	VALORE (m)
1	5,10
2	4,99
3	5,02
4	4,98
5	5,08
6	5,05
7	4,82
8	5,05

- Calcola lo scarto quadratico medio.
- Esprimi correttamente il risultato della misura.
- L'incertezza percentuale corrispondente allo scarto quadratico medio è maggiore o minore del 5%?

[0,08 m; (5,01 ± 0,08) m; < 5%]

37 ★★☆ I chiodi dello stesso tipo comprati dal ferramenta hanno davvero la stessa lunghezza? Per provare a stabilirlo con un esperimento, un gruppo di studenti ha eseguito il controllo della lunghezza di 20 chiodi lunghi 3 cm secondo le dichiarazioni del fabbricante. I ragazzi hanno usato una riga con sensibilità 1 mm e un calibro centesimale con sensibilità 1/20 mm.

NUMERO DELLA MISURA	*L* (cm) RIGA	*L* (cm) CALIBRO
1	3,0	3,000
2	3,1	3,005
3	3,1	3,110
4	3,1	3,110
5	3,0	3,115
6	3,2	3,120
7	3,1	3,110
8	3,0	2,960
9	2,9	2,980
10	3,2	3,110
11	2,9	3,120
12	2,8	3,120
13	3,0	3,140
14	3,1	3,180
15	3,1	2,960
16	2,9	3,110
17	3,1	3,120
18	3,1	3,115
19	3,1	3,110
20	3,0	3,125

- Calcola il valore medio della lunghezza dei chiodi, sia con la riga che con il calibro.
- Per ogni serie di misure, calcola lo scarto quadratico medio.
- Esprimi correttamente i risultati delle due serie di misure.
- Le differenze nella lunghezza dei chiodi secondo te a cosa si possono attribuire? A errori sperimentali commessi dai ragazzi o a errori di fabbricazione dei chiodi?
- Rappresenta le due serie di dati mediante due istogrammi, per rendere più facile il confronto.

[3,0 cm, 3,086 cm; (3,0 ± 0,1) cm; (3,09 ± 0,06) cm]

38 ★★☆ Si misura, per venti volte consecutive, lo spessore di un blocco, ottenendo i seguenti valori:

5,4 cm; 5,6 cm; 5,3 cm; 5,3 cm; 5,4 cm; 5,7 cm; 5,5 cm; 5,5 cm; 5,4 cm; 5,5 cm; 5,8 cm; 5,3 cm; 5,4 cm; 5,4 cm; 5,3 cm; 5,6 cm; 5,5 cm; 5,2 cm; 5,3 cm; 5,4 cm.

- Costruisci con un foglio di calcolo l'istogramma che rappresenta la distribuzione dei valori.
- Calcola il valore medio dello spessore del blocco.
- Calcola lo scarto quadratico medio ed esprimi correttamente il risultato della serie di misure effettuata.

[(5,4 ± 0,2) cm]

39 **PROVA AUTENTICA**
per le competenze

Una misura di lunghezza è stata ripetuta 100 volte, con uno strumento che misura i centimetri (sensibilità uguale a 0,01 m).
I dati sono raccolti in colonna nel file GaussAutentico.xls.
L'unità di misura utilizzata è il metro.
Puoi aprire il file con un foglio di calcolo come Excel, LibroOffice Calc, OpenOffice Calc o Gnumeric. Questi ultimi 3 programmi sono scaricabili gratuitamente.

ANALISI DEI DATI

a. Utilizzando il foglio di calcolo ordina i numeri trovati dal più piccolo al più grande; in questo modo è facile determinare il valore minimo e quello massimo, e poi calcolare l'errore massimo sui dati.
b. Ricava il valore medio dei dati ottenuti. Invece di farlo tu stesso, puoi trovare il modo di determinarlo con il foglio di calcolo.
c. Dividi l'intervallo tra il valore minimo e quello massimo in una decina di intervalli

(per esempio tra 8,1 e 8,2, tra 8,2 e 8,3 e così via). Con i dati ordinati dal più piccolo al più grande, conta quanti ce ne sono in ognuno degli intervalli che hai individuato.

d. Costruisci una tabella come quella presentata nel paragrafo precedente e un istogramma.

e. Utilizzando la formula **(5)** o l'apposita funzione nel foglio di calcolo (DEV.ST.POP), calcola lo scarto quadratico medio dei dati.

COMUNICAZIONE DEI RISULTATI OTTENUTI

Scrivi in modo corretto il risultato della «misura» effettuata, esprimendolo sia con l'errore massimo, sia con lo scarto quadratico medio.

5. L'INCERTEZZA NELLE MISURE INDIRETTE

DOMANDE SUI CONCETTI

40 L'incertezza sulla somma di due misure sperimentali è maggiore, minore o uguale a quella sui singoli valori?

41 Lo spigolo di un cubo di lato 10 cm è noto con un errore relativo percentuale dell'1%. Come si può scrivere il suo volume?

[$(1{,}00 \pm 0{,}03) \times 10^3\ \text{cm}^3$]

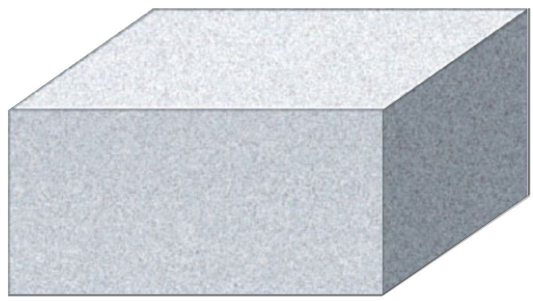
42 La misura dei lati di un rettangolo ha fornito i risultati (5,2 ± 0,3) cm e (7,5 ± 0,3) cm. Quindi la differenza tra i due lati è (2,3 ± 0,2), semiperimetro del rettangolo è (12,7 ± 0,6) cm e l'area del rettangolo è (39 ± 4) cm^2. Vero o falso?

ESERCIZI NUMERICI

53 ★★ **PROBLEMA SVOLTO**

Incertezza su un quoziente

Per calcolare la densità di un blocchetto di granito misuriamo la sua massa, che risulta $m = (2{,}35 \pm 0{,}03)$ kg, e il suo volume, che risulta $V = (8{,}62 \pm 0{,}07) \times 10^{-4}\ \text{m}^3$.



▶ Calcola il valore sperimentale $\bar{d}$ della densità così ottenuto.

▶ Calcola l'incertezza Δd su tale valore.

▶ Esprimi il risultato della misura in maniera corretta.

DATI E INCOGNITE

	GRANDEZZE	SIMBOLI	VALORI	COMMENTI
DATI	Massa	m	2,35 kg	
	Incertezza sulla massa	Δm	0,03 kg	
	Volume	V	$8{,}62 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$	
	Incertezza sul volume	ΔV	$0{,}07 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$	
INCOGNITE	Densità	$\bar{d}$	?	Valore sperimentale
	Incertezza sulla densità	Δd	?	

RAGIONAMENTO

- La densità è data dalla formula $d = m/V$.
- La densità è un quoziente tra due valori. Quindi si calcola prima l'incertezza relativa su d con la formula

$$\frac{\Delta(a/b)}{\bar{a}/\bar{b}} = \frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}$$ e da questo si ricava l'incertezza Δd.

RISOLUZIONE

Il valore sperimentale della densità è dato dalla formula $d = m/V$:

$$\bar{d} = \frac{\bar{m}}{\bar{V}} = \frac{2,35\ \text{kg}}{8,62 \times 10^{-4}\ \text{m}^3} = 2,726 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

L'incertezza relativa per la densità si calcola con la formula precedente con $a = m$ e $b = V$:

$$\frac{\Delta d}{\bar{d}} = \frac{\Delta m}{\bar{m}} + \frac{\Delta V}{\bar{V}} = \frac{0,03\ \text{kg}}{2,35\ \text{kg}} + \frac{0,07 \times 10^{-4}\ \text{m}^3}{8,62 \times 10^{-4}\ \text{m}^3} = 0,013 + 0,008 = 0,021.$$

Per isolare Δd si moltiplicano il primo e l'ultimo passaggio del calcolo precedente per $\bar{d}$:

$$\Delta d = 0,021 \times \bar{d} = 0,021 \times \left(2,726 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 0,057 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

CONTROLLO DEL RISULTATO

Visto che l'incertezza cade già sulla seconda cifra dopo la virgola, non ha senso scrivere il risultato dell'esperimento con tre decimali. La maniera corretta per esprimere il risultato ottenuto è:

$$d = (2,73 \pm 0,06) \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

54 ★★☆ Un cubetto di alluminio viene utilizzato per costruire un dado da incastro. La lunghezza del lato del dado è $(3,05 \pm 0,05)$ cm. La densità dell'alluminio vale $(2960 \pm 60)\ \text{kg/m}^3$.

- ▶ Calcola il valore della massa del dado.
- ▶ Calcola la sua incertezza.
- ▶ Esprimi correttamente il risultato ottenuto.

[84×10^{-3} kg; 6×10^{-3} kg; $(84 \pm 6) \times 10^{-3}$ kg]

55 ★★☆ Le dimensioni esterne di un armadio sono: larghezza $(3,75 \pm 0,02)$ m, altezza $(2,55 \pm 0,02)$ m e profondità $(0,65 \pm 0,01)$ m.

- ▶ Calcola il volume esterno con la relativa incertezza di misura e con il corretto numero di cifre significative.
- ▶ Calcola il perimetro con la relativa incertezza della faccia dell'armadio che è appoggiata al pavimento.

[$(6,2 \pm 0,2)\ \text{m}^3$; $(8,80 \pm 0,06)$ m]

7. LE CIFRE SIGNIFICATIVE

DOMANDE SUI CONCETTI

56 Il tuo compagno di banco scrive come risultato di una misura di massa in laboratorio $(18,25 \pm 0,5)$ g.

- ▶ Perché il risultato della misura scritto in questo modo non è corretto?

57 Quanto vale, espressa con il corretto numero di cifre significative, l'area di una fettuccia di lati 1,953 m e 1,1 cm?

58 Come si scrive il numero 10,049 arrotondato a 3 cifre significative?

59 Con una bilancia di sensibilità 10 g controlli la massa di una confezione da un kilogrammo di zucchero.

- ▶ Come scrivi il risultato con il numero corretto di cifre significative?

60 Una superficie di 40 m^2 viene divisa in 1000 parti uguali. Quanto vale l'area di ogni parte?

ESERCIZI NUMERICI

68 ★★☆ Il numero di Nepero o numero di Eulero, indicato con la lettera e, è una costante matematica molto importante, collegata a una funzione conosciuta come funzione esponenziale. Considera come suo valore il numero 2,718 281 828 459.

- ▶ Riscrivilo con sette, cinque, tre, due e una cifra significativa.

69 ★★☆ The side of a square measures 0.135 m.

- ▶ Find the length of its diagonal with the correct number of significant digits.

[0.191 m]

8. LE LEGGI SPERIMENTALI

DOMANDE SUI CONCETTI

72 La curva ottenuta riportando in un grafico cartesiano i valori del periodo di oscillazione di un pendolo e della sua lunghezza è un arco di parabola.

- ▶ Che tipo di proporzionalità esiste tra l e T?

[Proporzionalità quadratica]

73 Quale delle seguenti osservazioni non è verificata ogni volta che si ripete la prova sperimentale?

a. Se esco quando piove, mi bagno.

b. Il vento muove le foglie.

c. Tutte le volte che arrivo in stazione in ritardo, il treno è invece puntuale.

d. Bisogna sempre tornare a spolverare i mobili.

ESERCIZI NUMERICI

74 ★★☆ Una molla sospesa a un estremo si allunga quando all'altro estremo vengono applicati dei pesi. Facciamo un esperimento: all'estremo libero della molla applichiamo in successione pesetti da 20 g, 40 g, 60 g, 80 g. Nella tabella seguente sono riportate le masse dei pesetti attaccati e i corrispondenti allungamenti della molla.

MASSA APPLICATA (g)	ALLUNGAMENTO DELLA MOLLA (cm)
0	0
20	2
40	4
60	6
80	8

▶ Riporta in un grafico l'allungamento della molla in funzione della massa applicata e disegna le barre di errore.

▶ Scrivi la relazione matematica tra le due grandezze.

▶ Definisci il tipo di proporzionalità che le lega.

[$D_l = p/10$; proporzionalità diretta]

75 ★★☆ Nella tabella seguente sono riportati i valori del lato e della corrispondente area di alcune piastrelle quadrate.

LATO (cm)	AREA (cm²)
12	144
14	196
16	256
18	324

▶ Rappresenta in un grafico l'area di una piastrella in funzione del lato.

▶ Scrivi la relazione matematica tra il lato del quadrato e la sua area.

▶ Individua il tipo di proporzionalità che li lega.

[$l = \sqrt{A}$; proporzionalità quadratica]

76 ★★☆ Riferisciti alla tabella di dati del problema n. 74.

▶ Riporta in un grafico cartesiano l'allungamento Δl (in ordinata) in funzione della massa m (in ascissa), scegliendo opportunamente la scala su entrambi gli assi cartesiani per ottenere un grafico proporzionato.

▶ Disegna le barre di errore.

PROBLEMI GENERALI

6 ★★☆ Un gruppo di studenti misura otto volte l'intervallo di tempo impiegato da un pendolo per compiere un'oscillazione completa. Il cronometro utilizzato ha una sensibilità di 0,1 s. Le misure ottenute sono:

MISURA	VALORE (s)
1	25,8
2	24,0
3	21,0
4	23,2
5	23,8
6	23,0
7	20,2
8	20,8

▶ Calcola il valore medio e l'errore massimo delle misure.

▶ Esprimi il risultato della misura con il corretto numero di cifre significative.

▶ Calcola l'errore percentuale.

▶ Se i valori ottenuti fossero stati tutti uguali, l'incertezza associata al valore medio sarebbe stata nulla?

[22,7 s; 2,8 s; (23 ± 3) s; 12%]

7 ★★☆ Durante un rilievo topografico, la misura del lato maggiore di un appezzamento di terra rettangolare ha fornito il valore (90,8 ± 0,3) m. Il fossato che corre lungo due lati consecutivi del lotto di terreno è lungo (150,2 ± 0,5) m.

▶ Calcola il valore più plausibile per la lunghezza del lato minore e l'incertezza corrispondente.

▶ Calcola l'area dell'appezzamento.

▶ Calcola l'incertezza relativa percentuale associata all'area.

[(59,4 ± 0,8) m; $5{,}39 \times 10^3$ m²; 1,7%]

8 ★★☆ Il raggio del pianeta Giove è $7{,}14 \times 10^7$ m e la sua massa vale $1{,}900 \times 10^{27}$ kg.

▶ Calcola l'area della superficie di Giove, considerandolo di forma sferica.

▶ Calcola la densità di Giove, considerandolo di forma sferica.

▶ Esprimi i risultati con il corretto numero di cifre significative.

[$6{,}41 \times 10^{16}$ m^2; $1{,}25 \times 10^3$ kg/m^3]

9 ★★ In the picture you can see a food label.

▶ How many significant digits do kcal, protein, carbohydrate, sugar have?

10 ★★ La figura mostra l'etichetta di un prodotto alimentare straniero.

Nutrition Facts

Serving Size 14 g
Serving per Container 30

Amount Per Serving		
Calories 45	Calories From Fat 45	
	% Daily Value *	
Total Fat	5 g	8%
Saturated Fat	1 g	5%
Polyunsaturated	2.5 g	
Monounsaturated	1 g	
Cholesterol	0 mg	0%
Sodium	90 mg	4%
Total Carbonhydrate	0 g	0%
Protein	0 g	0%
Vitamin A	10%	

Not a significant source of dietary fiber, sugar, vitamin C, calcium and iron

*Percent Daily Values are based on a 2,000 calorie diet. Your daily values may be higher or lower depending on your calorie needs.

NET WT 15 OZ (425 g)

▶ Sull'etichetta in basso si legge "NET WT 15 OZ (425 g)". OZ è l'abbreviazione di oncia, un'unità di misura della massa che non appartiene al Sistema Internazionale e che vale 1/16 di libbra, cioè 28,35 g.

▶ È corretta l'equivalenza indicata da once a grammi?

▶ Il produttore di cibo in scatola usa le cifre significative in modo corretto? Se no, scrivi l'equivalenza con il corretto numero di cifre significative.

[Sì, $4{,}2 \times 10^2$ g]

11 ★★ La sigla "fl oz" indica l'oncia fluida, un'unità di misura di volume che non appartiene al Sistema Internazionale e che si usa per etichettare gli alimenti negli Stati Uniti, ed equivale a 30 mL.

Derek Hatfield / Shutterstock

▶ È corretta l'equivalenza indicata da once fluide a mL?

▶ Il produttore di cibo in scatola usa le cifre significative in modo corretto? Se no, scrivi l'equivalenza con il corretto numero di cifre significative.

12 ★★★ **ARTE Gli azulejos**

Gli *azulejos* sono piastrelle decorative molto usate in Portogallo per rivestire le pareti degli edifici. Supponiamo di dover ricoprire una superficie di 24 m^2 con *azulejos* di forma quadrata. La misura del lato di una piastrella fornisce il valore $15{,}0 \pm 0{,}5$ cm.

▶ Calcola il numero minimo e il numero massimo di piastrelle necessarie per rivestire la parete considerando l'incertezza sperimentale.

[$1{,}00 \times 10^3$; $1{,}14 \times 10^3$]

18 **LA FISICA DEL CITTADINO Proiezioni elettorali**

In un Paese si sono svolte le elezioni politiche, in cui si fronteggiavano due coalizioni: la coalizione Bianca è formata dai partiti B_1, B_2 e B_3, mentre quella Gialla è formata dai partiti G_1, G_2, G_3 e G_4.

Quattro ore dopo la chiusura dei seggi sono disponibili i primi risultati che provengono da un certo numero di località situate in diverse zone del Paese. Questi risultati prevedono di fare una prima previsione, che è soggetta a errore perché non è detto che tutti gli elettori del Paese abbiano votato come quelli delle sezioni scrutinate per prime.

Le previsioni per il risultato del voto (con le corrispondenti incertezze) sono le seguenti:

PARTITO	COALIZIONE	PERCENTUALE DI VOTI OTTENUTI SECONDO I PRIMI RISULTATI
B_1	Bianca	15% ± 2%
B_2	Bianca	21% ± 3%
B_3	Bianca	17% ± 2%
G_1	Gialla	8% ± 1%
G_2	Gialla	25% ± 3%
G_3	Gialla	12% ± 2%
G_4	Gialla	2% ± 1%

Domanda 1:

Esamina le prime tre righe della tabella precedente.

▶ Sulla base dei dati forniti, qual è il valore più plausibile per la percentuale totale di voti ottenuti dalla coalizione Bianca? Quali sono, rispettivamente, la massima e la minima percentuale che la coalizione Bianca può ottenere sulla base di tale previsione?

Domanda 2:

Esamina le ultime quattro righe della tabella precedente.

▶ Sulla base dei dati forniti, qual è il valore più plausibile per la percentuale totale di voti ottenuti dalla coalizione Gialla? Quali sono, rispettivamente, la minima e la massima percentuale che la coalizione Gialla può ottenere sulla base di tale previsione?

Domanda 3:

Considera i risultati che hai ottenuto finora.

▶ Sulla base di essi, puoi individuare una coalizione di partiti che *certamente* avrà la maggioranza dei voti in queste elezioni?

[53%, 60%, 46%; 47%, 40%, 54%]

GIOCHI DI ANACLETO

1 In un esperimento si lascia cadere una biglia da una determinata altezza e si misura il tempo impiegato dalla biglia per toccare il pavimento. In tre misure successive si sono trovati i valori seguenti: 0,95 s; 0,96 s; 0,99 s.

▶ Assumendo come misura del tempo di caduta della biglia il valore medio dei tre tempi misurati, quale dei seguenti valori è più corretto scegliere?

a. 0,96 s.

b. 0,966 s.

c. 0,967 s.

d. 0,97 s.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2013)

2 Quattro gruppi di studenti hanno misurato la durata di 10 oscillazioni di uno stesso pendolo. Ciascun gruppo ha raccolto i valori riportati nella tabella seguente:

GRUPPO A	7,25 s	7,75 s	8,25 s
GRUPPO B	7,2 s	7,25 s	7,3 s
GRUPPO C	8,25 s	8,75 s	9,25 s
GRUPPO D	8,2 s	8,3 s	8,9 s

▶ Dello stesso pendolo si possiede anche una misura attendibile che dà, per dieci oscillazioni, una durata di 8,25 s. In riferimento a questa, quale gruppo ha ottenuto una serie di misure più affidabile, e perciò più accurata?

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2011)

3 Quale dei seguenti numeri rappresenta correttamente il risultato dell'addizione

$1{,}101 \times 10^{-4} + 2{,}7392 \times 10^{-6}$?

a. $3{,}8402 \times 10^{-10}$.

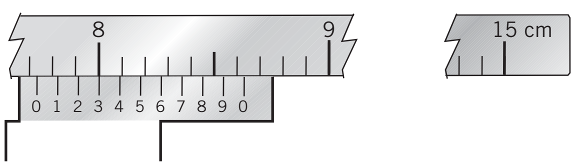
b. $1{,}128392 \times 10^{-4}$.

c. $1{,}1284 \times 10^{-2}$.

d. $1{,}128 \times 10^{-4}$.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2010)

4 Per misurare accuratamente il diametro esterno di un tubo metallico si è usato un calibro dotato di nonio. Nella figura si vede la posizione delle varie parti del calibro in questa misura.



▶ Il diametro del tubo è

a. 7,73 cm.

b. 8,03 cm.

c. 8,30 cm.

d. 8,63 cm.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2008)

5 Una certa quantità di sostanza da utilizzare in un esperimento è stata pesata ripetutamente trovando i seguenti risultati:

MASSA (g)
40,75
40,60
40,70
40,25
40,70
40,80
40,65

▶ Quale delle seguenti coppie di valori meglio esprime la massa di quella sostanza e l'incertezza nella sua misura?

	VALORE MEDIO DELLA MASSA IN GRAMMI	INCERTEZZA DEL VALORE MEDIO IN GRAMMI
A	40,64	0,01
B	40,6	0,3
C	40,7	0,3
D	40,70	0,01

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2007)

6 A quale dei seguenti ordini di grandezza si avvicina di più lo spessore di un foglio di carta?

a. 10^{-4} m.

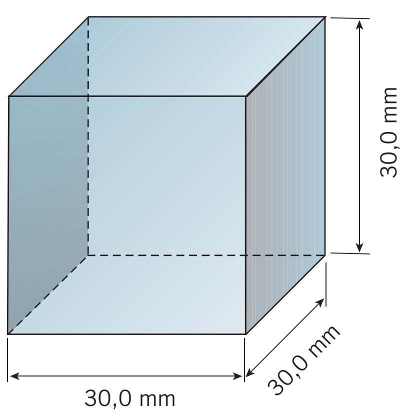
b. 10^{-2} m.

c. 10^{0} m.

d. 10^{2} m.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2004)

7 Le lunghezze di tre spigoli di un cubo sono state misurate usando un calibro. Il calibro usato permette letture con un'incertezza di ± 0,1 mm.



▶ Quali dei seguenti valori indica meglio l'incertezza con cui può essere calcolato il volume del cubo?

a. $\frac{1}{27}$%.

b. $\frac{3}{10}$%.

c. $\frac{1}{3}$%.

d. 1%.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 1999)

8 Per determinare la capacità di un recipiente di forma cubica si sono seguiti due procedimenti.
Nel primo caso sono stati misurati gli spigoli interni del recipiente trovando per tutti il valore $l = (0{,}200 \pm 0{,}002)$m, poi è stato calcolato il volume del cubo $V = l^3$.
Nel secondo caso il recipiente è stato pesato prima vuoto e poi colmo d'acqua trovando che la massa d'acqua è $m = (8{,}000 \pm 0{,}008)$kg. Conoscendo la densità dell'acqua con una precisione del 0,2%, $d = 1{,}000$ g · cm^{-3}, si è calcolato il volume, $V = m/d$.
La precisione della misura del volume è

a. migliore nel primo caso perché l'incertezza assoluta delle misure di l è più piccola di quella della misura della massa.

b. migliore nel secondo caso perché l'incertezza relativa delle misure è più piccola.

c. uguale nei due casi perché il volume è lo stesso.

d. non confrontabile perché si sono seguiti procedimenti diversi.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 1998)

9 Uno studente vuole misurare il diametro di una moneta. Per farlo usa una riga millimetrata per misurare quattro monete uguali messe una accanto all'altra, come nella seguente figura.

Lo studente ha stimato che gli estremi X e Y si trovano, sulla riga, nelle seguenti posizioni:
$X = (1{,}0 \pm 0{,}2)$ cm, $Y = (5{,}0 \pm 0{,}2)$ cm.

▶ Qual è, tra le seguenti, la misura del diametro di una moneta con l'incertezza della misura?

a. (1,0 ± 0,05) cm.

b. (1,0 ± 0,1) cm.

c. (1,0 ± 0,2) cm.

d. (1,0 ± 0,4) cm.

e. (1,0 ± 0,8) cm.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 1997)

10 In una relazione di laboratorio si trova scritto "d = 12,25 mm *con errore percentuale pari allo* 0,5%". L'incertezza di questa misura vale:

a. 0,5 mm.

b. 0,01 mm.

c. 0,04 mm.

d. 0,06 mm.

e. 0,005 mm.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 1997)

4 LE FORZE

Shebeko/Shutterstock

2. LA MISURA DELLE FORZE

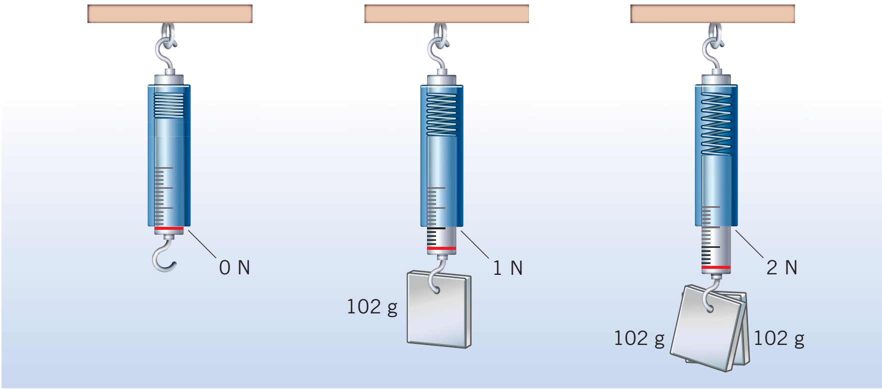
La taratura del dinamometro

STRUMENTI TARATI

Anche l'orologio, il termometro e il tachimetro sono strumenti tarati.

Tarare il dinamometro significa costruire una scala graduata, sulla quale leggere i valori delle forze.

- Segniamo 0 N nella posizione in cui si trova l'estremità della molla scarica.
- Dopo aver appeso alla molla una massa di 102 g, segniamo 1 N nella nuova posizione.
- Appendiamo due masse da 102 g e segniamo 2 N, poi proseguiamo sempre allo stesso modo.



Abbiamo così ottenuto una scala graduata che ci permette di misurare le forze.

9. LEGGI SPERIMENTALI E MODELLI

La legge di Hooke è un esempio di legge sperimentale.

Una **legge sperimentale** stabilisce una relazione tra grandezze basata su esperimenti.

Nel caso della legge di Hooke le grandezze sono la *forza* elastica e lo *spostamento* di una molla, e la relazione è espressa dalla formula

$$F = kx.$$

La legge di Hooke:

- è una legge, perché descrive una regolarità di un fenomeno naturale: le molle reagiscono in modo prevedibile quando sono accorciate o allungate;
- è sperimentale, perché è verificata da numerosi esperimenti.

I modelli

Ci sono tanti tipi di molle con caratteristiche diverse: lunghezza, spessore, materiale di cui sono fatte. Alcune sono colorate, altre sono più lisce al tatto, ciascuna fa un particolare rumore quando è lasciata cadere per terra. Di tutte le proprietà delle molle la legge di Hooke ne descrive una sola: come varia la forza elastica al variare della lunghezza.

Mircea Maties/Shutterstock

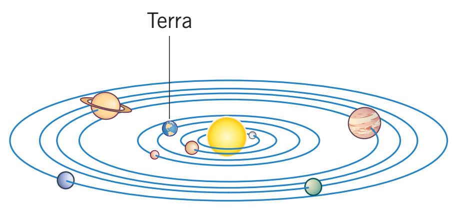
Scrivendo la legge di Hooke si trascurano molte delle caratteristiche di una molla sostituendola con un suo modello, cioè una sua descrizione schematica.

Un **modello** è una descrizione semplificata di un ambito di fenomeni, che si basa su leggi sperimentali.

Il modello eliocentrico, proposto da Copernico nel 1543, descrive come si muovono i corpi del Sistema Solare: i pianeti ruotano su orbite diverse intorno al Sole. Questo modello fu perfezionato dalle leggi sperimentali di Keplero, una delle quali afferma che le orbite sono ellissi.

Un modello mette in luce alcune caratteristiche, ma ne trascura altre.

A Così il modello eliocentrico descrive come si muovono i pianeti intorno al Sole.



B Tuttavia, non si occupa di altre caratteristiche importanti; per esempio, come nasce la luce del Sole.

Four Seasons, Brand X, Culver City 2001

Un altro modello, quello della fusione nucleare, descrive come è prodotta la luce all'interno del Sole, mediante la fusione di nuclei di idrogeno. Quindi, per descrivere un ambito di fenomeni (per esempio il Sistema Solare) occorrono più modelli, che forniscono descrizioni semplificate da punti di vista diversi.

- Un modello consente di fare delle *previsioni*. Così la meccanica di Newton, il modello che descrive come si muovono gli oggetti, permette di prevedere con estrema precisione quando avvengono le eclissi di Sole.
- Un buon modello consente anche di *progettare* dei dispositivi tecnologici. Nel 1969 siamo stati in grado di mandare un'astronave sulla Luna anche perché la

meccanica di Newton descrive in modo accurato il moto dell'astronave, della Terra e della Luna.

Le regole del gioco della scienza

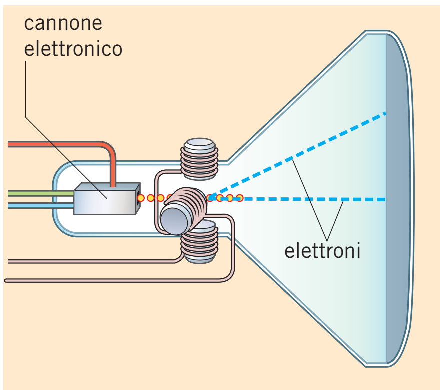
Scopo della fisica è costruire modelli di fenomeni naturali. Perché un modello sia considerato valido dagli scienziati, è indispensabile che sia in accordo con gli esperimenti.

Se un ricercatore fa un esperimento che dà un risultato diverso da quello previsto, allora il modello non è più valido nell'ambito dei fenomeni che intendeva descrivere. Gli scienziati hanno allora il compito di inventare un modello nuovo, che sia in accordo con il nuovo esperimento e con tutti gli altri fatti in precedenza. Tuttavia il vecchio modello non va scartato, perché continua a essere valido in un ambito di fenomeni più ristretto.

I modelli scientifici non sono validi per sempre; sono validi fino a prova contraria.

Fino a un secolo fa si pensava che la meccanica di Newton descrivesse bene tutti i moti. Nel 1905 Einstein scoprì che le sue previsioni erano sbagliate quando i corpi si muovono a velocità vicine a quelle della luce.

A La teoria della relatività è il modello che gli scienziati oggi considerano valido per descrivere tutti i moti, anche quello degli elettroni che formano l'immagine sul televisore.



B La meccanica di Newton resta valida nell'ambito delle velocità più piccole di quelle della luce. È il modello che si continua a usare con successo per progettare i viaggi planetari.

ESA, S. Corvaja

Le verità della scienza non sono assolute, ma provvisorie e migliorabili. I modelli scientifici devono:

- basarsi su dati sperimentali, cioè su fatti;
- essere esposti alla falsificazione, cioè contenere affermazioni che possano essere contraddette da nuovi esperimenti.

Sono queste le regole del gioco della scienza, che ne garantiscono la trasparenza, la solidità e la capacità di fare nuove scoperte.

ESERCIZI

1. LE FORZE CAMBIANO LA VELOCITÀ

DOMANDE SUI CONCETTI

1 La forza di un ciclista che pedala in salita è una forza a distanza o di contatto? E la forza che esercita la Terra sul ciclista?

2 Se dai una spinta a un'automobilina sul pavimento, essa corre per un po', ma poi rallenta fino a fermarsi perché, una volta esaurita la spinta iniziale, nessuna forza agisce su di essa.

▶ È corretto?

3 Un lampadario si stacca improvvisamente dal soffitto.

▶ Quali sono le forze applicate prima e durante la caduta?

▶ Sono forze di contatto o a distanza?

4 Fai tre esempi per ognuna delle situazioni seguenti:

▶ una forza fa muovere un oggetto che prima era fermo;

▶ una forza fa fermare un oggetto che prima si muoveva;

▶ una forza fa cambiare direzione a un oggetto in movimento.

2. LA MISURA DELLE FORZE

DOMANDE SUI CONCETTI

6 Per spostare un tavolo da biliardo, Luca e Giovanni applicano ciascuno una forza sullo stesso lato del tavolo, di uguale intensità e nella stessa direzione.

▶ È sufficiente questa descrizione per capire come si muoverà il tavolo?

7 È corretto affermare che il dinamometro è uno strumento per misurare l'allungamento di una molla?

8 Che forza applichi al tuo zaino quando lo porti in spalla?

ESERCIZI NUMERICI

9 ★☆☆ Vogliamo migliorare la taratura di un dinamometro inserendo le tacche con i decimi di newton.

▶ Che massa deve avere un oggetto su cui si esercita una forza-peso di intensità di 0,1 N?

[1×10 g]

3. LA SOMMA DELLE FORZE

DOMANDE SUI CONCETTI

13 La forza risultante di due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ ha sempre un'intensità pari alla somma delle intensità delle due forze, purché le due forze abbiano la stessa direzione.

▶ È corretto? Perché?

14 Maria e Paola devono spostare un baule. Maria riesce a spingere o tirare con una forza di 40 N parallela al pavimento, Paola con una forza di 45 N parallela al pavimento.

▶ È più conveniente che entrambe spingano, entrambe tirino o che una spinga e l'altra tiri?

ESERCIZI NUMERICI

23 ★★☆ Due rimorchiatori trainano una chiatta con forze di intensità 300 N e 400 N perpendicolari fra loro e applicate allo stesso punto.

▶ Qual è il valore della forza risultante?

[500 N]

24 ★★☆ Due amici spingono un'automobile in panne con due forze parallele e con lo stesso verso, di intensità rispettivamente 250 N e 200 N.

▶ Quanto vale la forza risultante esercitata?

▶ Quanto varrebbe la forza risultante se le direzioni delle forze formassero un angolo di 90°?

[450 N; 320 N]

4. I VETTORI

DOMANDE SUI CONCETTI

25 «Su un corpo di massa $m = 102$ g la Terra esercita una forza che ha intensità $\vec{F} = 1{,}00\,\text{N}$.»

▶ Perché questa frase non è corretta?

26 Forza e spostamento sono due grandezze vettoriali.

▶ Si possono sommare con il metodo punta-coda?

27 Qual è la differenza tra distanza percorsa e vettore spostamento?

Dovendosi spostare da un punto A a un punto B, qual è il percorso più breve?

28 Fra le seguenti grandezze, dividi quelle vettoriali da quelle scalari: forza, massa, spostamento, velocità, temperatura, densità, lunghezza, volume, peso, intervallo di tempo, carica elettrica.

ESERCIZI NUMERICI

32 ★☆☆ **SPORT Lo spostamento del windsurf**

Per spostarsi controvento il windsurf si muove a zig-zag, in modo da formare sempre un angolo di 45° con la direzione del vento. Percorre un primo tratto di 100 m verso destra, poi un secondo di 200 m verso sinistra, infine uno di 100 m di nuovo verso destra.

▶ Qual è stato lo spostamento complessivo?

[283 m]

33 ★☆☆ Un cane legato con una catena lunga 6,0 m corre lungo il percorso circolare con raggio maggiore possibile, compiendo una mezza circonferenza.

▶ Calcola la lunghezza percorsa e il modulo del vettore spostamento.

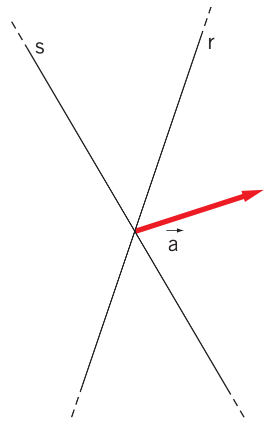
▶ Calcola il modulo del vettore spostamento nel caso compia due giri completi.

[19 m, 12 m; 0 m]

5. LE OPERAZIONI CON I VETTORI

ESERCIZI NUMERICI

42 ★☆☆ Scomponi il vettore $\vec{a}$ della figura seguente lungo le due rette r e s.



43 ★☆☆ Su un foglio a quadretti disegna il vettore $\vec{v}$, orizzontale, di lunghezza 4 quadretti.

▶ Trova i vettori: $2\vec{v}$, $-\vec{v}/2$, $-3\vec{v}$.

44 ★☆☆ Su un foglio a quadretti disegna i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che sono lunghi 6 e 8 quadretti e sono perpendicolari fra loro.

▶ Trova i vettori $\vec{a}-\vec{b}$ e $\vec{b}-\vec{a}$.

▶ Che cosa puoi dire di questi vettori?

45 ★☆☆ La forza $\vec{F}_1$ agisce nella direzione Nord-Sud, rivolta verso Sud, e ha un modulo 30 N. Una seconda forza $\vec{F}_2$ è descritta dalla formula $\vec{F}_2 = -2,5\vec{F}_1$.

▶ Quali sono la direzione e il verso di $\vec{F}_2$?

▶ Quanto vale il modulo di $\vec{F}_2$?

[75 N]

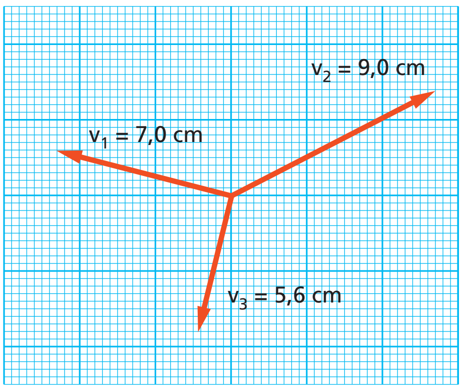
46 ★★☆ Disegna due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ che formano tra loro un angolo di 120°.

▶ Disegna i vettori $\vec{w}_1 = \vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{w}_2 = \vec{u} + \vec{v}$.

▶ Qual è il modulo di $\vec{w}_2 - \vec{w}_1$?

[$2v$]

47 ★★☆ Ricalca con un foglio trasparente i tre vettori della figura seguente. Prova a sommare i vettori in quest'ordine con il metodo del parallelogramma:



- $(\vec{v}_1+\vec{v}_2)+\vec{v}_3$, cioè somma prima $\vec{v}_1$ con $\vec{v}_2$ e poi il risultato con $\vec{v}_3$;
- $\vec{v}_1+(\vec{v}_2+\vec{v}_3)$.
- I due vettori somma ottenuti sono uguali?

6. LA FORZA-PESO E LA MASSA

DOMANDE SUI CONCETTI

54 Quanto vale il tuo peso (in newton) sulla Terra? E su Marte ($g = 3{,}74$ N/kg)?

55 Immagina di poter andare nello spazio in un punto lontanissimo da qualunque corpo celeste e di portare con te un dinamometro per pesarti.

- Quale peso segnerebbe? Perché?

56 Un astronauta si trova nello spazio a metà strada fra due stelle di uguale massa. Immagina che tutti gli altri oggetti celesti siano a distanza infinita.

- Quanto vale il peso (in newton) dell'astronauta?

ESERCIZI NUMERICI

59 ★☆☆ Sulla Terra, un astronauta ha una massa $m = 70$ kg e un peso $P = 687$ N.

- Se non dimagrisce e non ingrassa, quale sarà la sua massa una volta in orbita?
- Cosa puoi dire del suo peso?

[$m = 70$ kg]

60 ★★☆ **PROBLEMA SVOLTO**

Come cambia il peso

Un ragazzo di massa di 68,0 kg si trova al mare nei pressi dell'equatore, dove $g_1 = 9{,}78\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}$, e si pesa su una bilancia. Poi si reca sulla cima di una montagna alta circa 2000 m, senza cambiare latitudine, dove $g_2 = 9{,}77\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}$, e controlla nuovamente il suo peso.

- Di quanto è cambiato?

DATI E INCOGNITE

	GRANDEZZE	SIMBOLI	VALORI	COMMENTI
DATI	Massa	m	68,0 kg	
	Costante di proporzionalità tra peso e massa al mare	g_1	9,78 N/kg	
	Costante di proporzionalità tra peso e massa in montagna	g_2	9,77 N/kg	
INCOGNITE	Differenza di peso	$\Delta F_P = F_{P2} - F_{P1}$	?	

RAGIONAMENTO

- Al mare la forza-peso dipende dalla costante g_1, in montagna dipende da g_2.
- Conoscendo la massa, che non cambia, si calcolano le due forze-peso e quindi la loro differenza: $\Delta F_P = F_{P2} - F_{P1}$.

RISOLUZIONE

Il peso nelle due situazioni si calcola con la formula della forza-peso:

$$F_{P1} = mg_1 = 68{,}0\,\text{kg} \times 9{,}78\,\text{N/kg} = 665\,\text{N}$$

$$F_{P2} = mg_2 = 68{,}0\,\text{kg} \times 9{,}77\,\text{N/kg} = 664\,\text{N}$$

La differenza è:

$$\Delta F_P = F_{P2} - F_{P1} = 664\ \text{N} - 665\ \text{N} = -1\ \text{N}$$

CONTROLLO DEL RISULTATO

ΔF_P è negativa poiché il peso è diminuito. In effetti, la forza-peso diminuisce quando si sale rispetto al livello del mare.

61 ★★☆ Sulla Terra, dove $g = 9{,}80$ N/kg, un coniglio ha una massa di 3,80 kg. Se potesse viaggiare su Nettuno, il suo peso aumenterebbe di 4,56 N.

- La costante di proporzionalità g_N tra peso e massa su Nettuno è maggiore o minore rispetto alla Terra?
- Quanto vale g_N?

[11,0 N/kg]

62 ★★☆ **SPAZIO I satelliti di Giove**

Giove è stato studiato da vicino dalla sonda "Galileo", di massa 2564 kg. Il pianeta è circondato da almeno 67 satelliti naturali, di varie forme e dimensioni, tra i quali sono famosi in particolare Io ed Europa, dove la sonda avrebbe un peso rispettivamente di 4615 N e 3333 N.

- Quanto vale g su questi due satelliti?

[1,80 N/kg; 1,30 N/kg]

63 ★★☆ **SPAZIO Curiosity alla scoperta di Marte**

La sonda "Curiosity" è stata inviata su Marte per prelevare dei campioni di roccia. Il suo peso sulla Terra è di 8820 N mentre su Marte è di 3366 N.

- Qual è la massa della sonda?
- Quanto vale g su Marte?

[900 kg; 3,74 N/kg]

7. LE FORZE DI ATTRITO

DOMANDE SUI CONCETTI

68 Quali forze di attrito (radente, volvente, viscoso) intervengono nelle seguenti situazioni?

- Sciatore in discesa libera.
- Automobile che accelera.
- Stazione spaziale fuori dall'atmosfera.
- Alpinista in spaccata fra due pareti di roccia.

ESERCIZI NUMERICI

80 ★★☆ Gianni ha caricato una slitta con le scorte di legna per l'inverno. Per mettere in movimento la slitta esercita una forza di 64 N. I coefficienti di attrito statico e dinamico tra la slitta e la neve ghiacciata sono rispettivamente 0,10 e 0,050.

- Qual è la massa della slitta carica?
- Quale forza è necessaria per mantenerla in moto una volta partita?
- Per riportare nella rimessa la slitta vuota è sufficiente mantenere una forza di 3,4 N. Quanti kg di legna ha trasportato Gianni?

[65 kg; 32 N; 58 kg]

81 ★★☆ Vuoi tenere sollevato un libro premendolo con la testa contro un muro. Il coefficiente di attrito statico tra il libro e il muro è di 0,55 e il libro ha una massa di 800 g.

- Qual è la forza premente in questa situazione?
- Quale forza deve essere applicata perpendicolarmente al libro affinché stia fermo?

Suggerimento: il libro sta fermo se la forza-peso che lo tira verso il basso uguaglia la forza d'attrito che si oppone al moto.

[14 N]

8. LA FORZA ELASTICA

ESERCIZI NUMERICI

93 ★★☆ Un bambino gioca con il suo nuovo tappeto elastico che ha una costante elastica di 2400 N/m e la cui membrana, in una situazione di equilibrio, si trova a 30 cm da terra. Salendo, il bambino preme con il suo peso e il tappeto si abbassa di 15,0 cm.

- Quanto pesa il bambino?
- Il papà del bambino ha una massa di 85 kg. Potrà giocare con il tappeto?

[360 N; no]

94 ★★☆ Una molla con costante elastica pari a 80,0 N/m ha una lunghezza di 13,6 cm mentre su di essa è applicata una forza di 2,30 N.

- Quanto è lunga la stessa molla nella sua posizione di riposo (cioè quando nessuna forza la deforma)?

[10,7 cm]

PROBLEMI GENERALI

12 ★★★ Un vecchio orologio a pendolo ha la lancetta delle ore lunga 11,5 cm e la lancetta dei minuti lunga 14,5 cm, se misurate a partire dal centro dell'orologio. Calcola quanto distano tra loro le punte delle due lancette:

- alle 12 in punto;
- alle 18 in punto;
- alle 3 e 3′.

[3,0 cm; 26 cm; 16 cm]

13 ★★★ Una molla di costante elastica $2{,}3 \times 10^2$ N/m è fissata a un muro per un estremo ed è appoggiata sul pavimento. Viene compressa di 14 cm e le viene appoggiato davanti un vaso. Appena la molla viene rilasciata, essa spinge il vaso che rimane però fermo. Il coefficiente d'attrito statico tra il vaso e il pavimento è 0,45.

▶ Quanto pesa come minimo il vaso?

[$F_p > 72$ N]

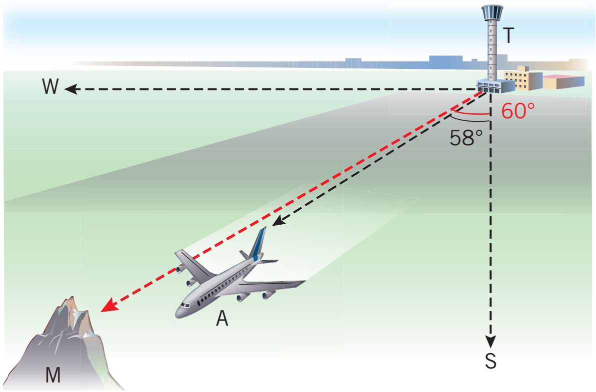
14 ★★★ Mario deve tenere sollevato un grosso scatolone pieno di libri, di massa totale pari a 16 kg. Pensa che gli possa essere d'aiuto appoggiare lo scatolone al muro e spingere con una forza perpendicolare al muro.

▶ Ha ragione?

▶ Quale coefficiente d'attrito statico deve esserci tra scatolone e muro affinché sia conveniente usare questo stratagemma?

[$\mu_s > 1$]

15 ★★★ Un piccolo velivolo si sta muovendo in una fitta nebbia. Dalla torre di controllo lo vedono a una distanza di 60 km a un angolo di 58° verso Ovest rispetto alla direzione Sud. Si accorgono che si sta dirigendo a Ovest verso una parete rocciosa, nascosta dalla nebbia, che si innalza per altri 380 m. Potrebbe schiantarsi a un angolo di 65° verso Ovest rispetto alla torre di controllo. Avvisano il pilota di aumentare la sua quota innalzandosi di un angolo pari a 2,0°.



▶ A quale distanza dalla torre di controllo rischia di schiantarsi il velivolo?

▶ Riesce il velivolo a oltrepassare la parete rocciosa?

[76 km; sì]

16 ★★★ **LA FISICA DEL CITTADINO Arriva l'imbianchino**

Bisogna liberare alcune pareti che devono essere ridipinte. Un metodo per spostare gli armadi consiste nel prendere dei vecchi panni di lana e inserirli sotto i piedi del mobile.

Massimiliano Trevisan

Domanda 1:

Anche dopo avere tolto dall'armadio gli oggetti più pesanti, spingere il mobile in modo da spostarlo dalla parete è quasi impossibile.

▶ Perché l'inserimento del panno di lana semplifica il compito di spostare l'armadio?

Domanda 2:

Con un po' di fatica riusciamo a mettere in moto l'armadio. Poi, spingerlo fino all'altra parte della stanza è decisamente più facile.

▶ Come si spiega questa esperienza dal punto di vista fisico?

Domanda 3:

La serratura di casa è rotta e non si riesce a chiudere la porta a chiave. Per passare la notte in maggiore sicurezza spingi l'armadio contro la porta (che si apre verso l'interno).

▶ Pensi sia più sicuro lasciare i panni di lana o toglierli?

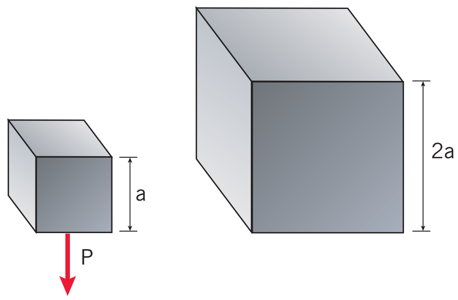
GIOCHI DI ANACLETO

9 Sulla superficie della Luna il campo gravitazionale vale 1,6 N/kg. Quale coppia di valori può andar bene per un oggetto che si trova sulla superficie della Luna?

	MASSA (kg)	PESO (N)
A	10	1,6
B	10	16
C	16	10
D	16	160

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2002)

10 In figura sono rappresentati due cubi: il più piccolo ha peso *P* e spigolo *a* che è la metà di quello del cubo più grande.



▶ Se i cubi sono fatti del medesimo materiale, il peso del cubo più grande è:

a. 2 *P*.

b. 4 *P*.

c. 8 *P*.

d. 16 *P*.

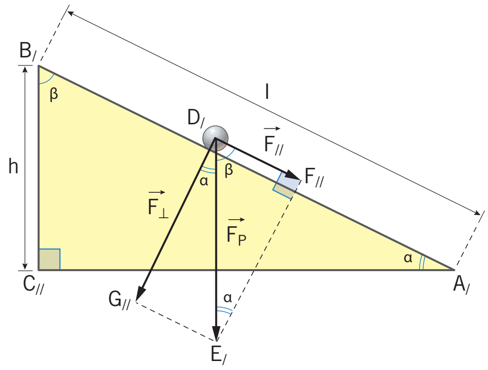
(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2002)

Dariusz Kantorski/Shutterstock

3. L'EQUILIBRIO SU UN PIANO INCLINATO

Dimostrazione della formula (1)

Nella **figura** sono evidenziati i triangoli *ABC* e *EDF*.



- Il primo ha due lati di lunghezze $\overline{AB} = l$ e $\overline{BC} = h$;
- il secondo ha due lati di lunghezze $\overline{DE} = F_P$ e $\overline{DF} = F_{//}$;
- i due triangoli sono simili perché hanno entrambi un angolo retto e, inoltre, i due angoli indicati con il simbolo β sono uguali (di conseguenza, sono uguali tra loro anche i due angoli indicati con α).

La similitudine tra i due triangoli permette di scrivere la proporzione

$$\overline{DF} : \overline{DE} = \overline{BC} : \overline{AB}$$

da cui possiamo ricavare

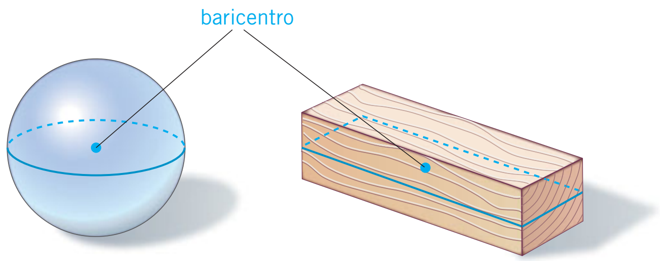
$$\overline{DF} = \overline{DE}\,\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \qquad \Rightarrow \qquad F_{//} = F_P\,\frac{h}{l}.$$

Ponendo $F_{\perp} = F_E$ la formula **(1)** è dimostrata.

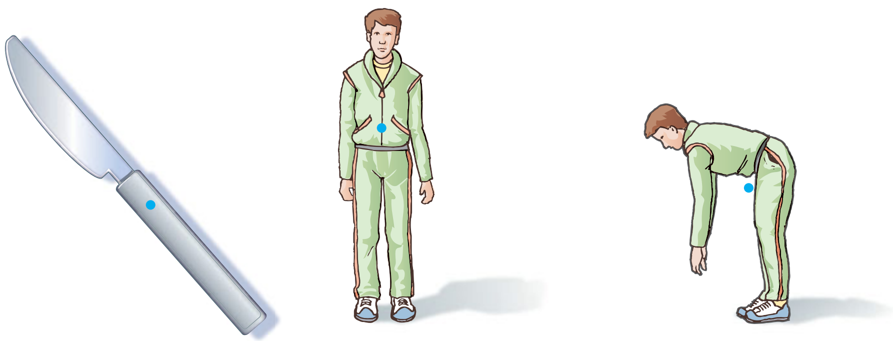
8. IL BARICENTRO

Dove si trova il baricentro

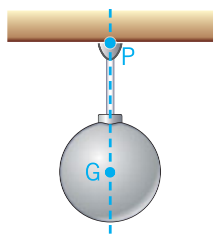
Consideriamo una pallina da flipper e un parallelepipedo di legno (**figura**). Hanno entrambi un centro di simmetria e sono corpi omogenei, cioè hanno la stessa densità in ogni punto. Per corpi di questo tipo il baricentro si trova nel centro di simmetria.



Per oggetti di forma irregolare e disomogenei non è facile individuare a prima vista il baricentro. Spesso, questo punto si trova dove la massa è più concentrata. Per esempio (**figura**), il baricentro di un coltello non è nel mezzo, ma è spostato verso il manico. Il baricentro di una persona che sta in piedi si trova vicino all'ombelico. Se però la persona si flette, il baricentro si sposta fuori dal corpo.



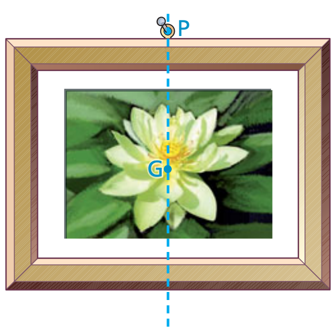
L'equilibrio di un corpo appeso



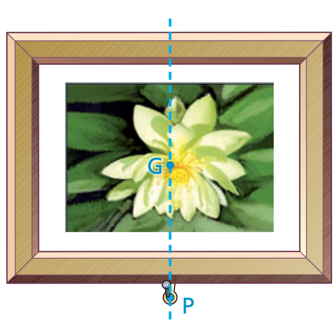
> Un corpo appeso per un punto *P* è in equilibrio se il suo baricentro *G* si trova sulla retta verticale che passa per *P*.

Un quadro può stare in equilibrio in molti modi diversi: basta che il punto al quale è appeso stia sulla verticale che passa per il suo baricentro.

A Se è appeso dall'alto, è in *equilibrio stabile*: se lo si sposta di poco, ritorna nella precedente posizione di equilibrio.



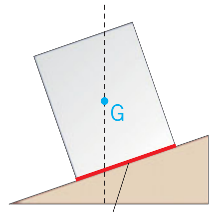
B Se è appeso dal basso, è in *equilibrio instabile*: se lo si sposta di poco, non ritorna nella precedente posizione di equilibrio.



C Se è appeso nel baricentro, è in *equilibrio indifferente*: se lo si sposta di poco, rimane in una nuova posizione di equilibrio.

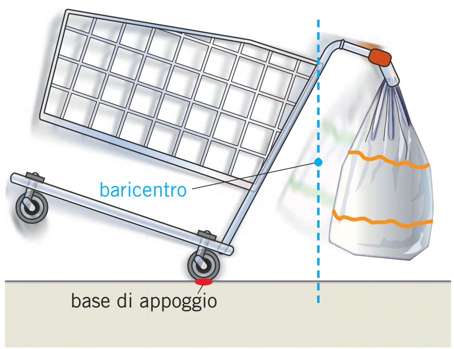
L'equilibrio di un corpo appoggiato

Un corpo appoggiato su un piano è in equilibrio se la retta verticale che passa per il suo baricentro interseca la base di appoggio.



A Per esempio, un carrello della spesa pieno è in equilibrio perché la verticale dal baricentro complessivo cade all'interno della base d'appoggio, delimitata dalle quattro ruote del carrello.

B Però, appendendo un oggetto pesante all'esterno del carrello vuoto, se ne provoca il ribaltamento, perché la verticale dal baricentro cade ora all'esterno della base d'appoggio.



ESERCIZI

1. IL PUNTO MATERIALE E IL CORPO RIGIDO

DOMANDE SUI CONCETTI

1 Associa a ciascun modello le sue caratteristiche.

MODELLO	SI SPOSTA	RUOTA	CAMBIA FORMA
Punto materiale	✓		
Corpo rigido			
Corpo deformabile			

2 Quale modello devi scegliere per descrivere ciascuna di queste situazioni?

SITUAZIONE	PUNTO MATERIALE	CORPO RIGIDO	CAMBIA FORMA
Frenata con testa-coda		✓	
Viaggio in in autostrada a velocità costante			
Parcheggio			
Tamponamento			
Moto in rettilineo con aumento di velocità			
Barca ormeggiata in porto			

3 Il moto di un oggetto di grandi dimensioni può essere studiato con il modello del punto materiale?

4 Il modello del corpo rigido è adatto a descrivere solo oggetti che è impossibile deformare?

2. L'EQUILIBRIO DEL PUNTO MATERIALE

DOMANDE SUI CONCETTI

6 Il valore delle forze vincolari dipende dal materiale di cui è fatto il vincolo? Motiva la risposta.

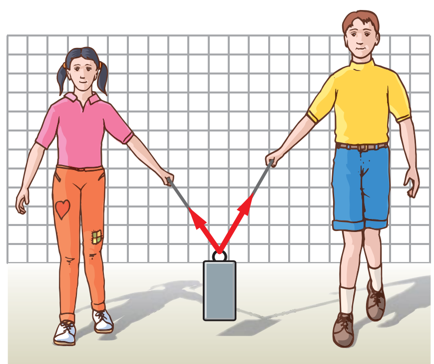
7 Un punto materiale che non risente di forze vincolari può essere in equilibrio? Motiva la risposta.

8 Ecco un elenco di corpi vincolati. Sai specificare l'oggetto o gli oggetti che costituiscono i loro vincoli?

CORPO VINCOLATO	OGGETTO O OGGETTI CHE COSTITUISCONO VINCOLI
Quadro appeso alla parete	Chiodo
Ruota di bicicletta	
Albero	
Lampadario	
Equilibrista che cammina su una fune	

ESERCIZI NUMERICI

10 ★☆☆ Due ragazzi trasportano una valigia. Le frecce rosse rappresentano le forze esercitate da ciascun ragazzo. La valigia è in equilibrio e può essere considerata un punto materiale.



- Determina graficamente la freccia che rappresenta la forza-peso sulla valigia.

11 ★☆☆ Due libri di massa 1,2 kg e 0,9 kg sono appoggiati sopra a un tavolo.

- Disegna i vettori-forza che agiscono su entrambi i libri.
- Il modulo della forza vincolare su ciascun libro è lo stesso? Perché?

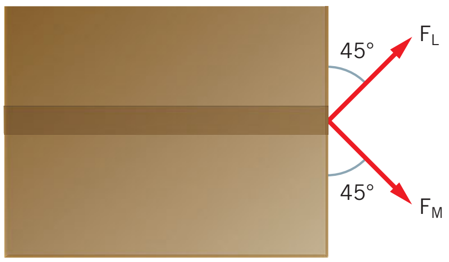
12 ★☆☆ Un lampadario di massa 3,5 kg è in equilibrio appeso al soffitto.

- Disegna i vettori-forza che agiscono sul lampadario.
- Calcola il modulo di tutte le forze disegnate.

[34 N, 34 N]

13 ★★

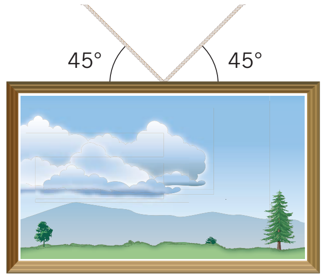
Mario e Lucia devono spostare uno scatolone di massa 30 kg appoggiato sul pavimento. Lo spingono da un lato come nella figura. L'intensità della forza esercitata da Mario è uguale a quella di Lucia ed è pari a 131 N. Il coefficiente di attrito statico tra la scatola e il pavimento è di 0,61.



▶ Mario e Lucia riescono a muovere lo scatolone?

14 ★★

Un quadro di massa 4,0 kg è appeso al muro tramite due fili come in figura.



▶ Quanto vale l'intensità della tensione su ciascun filo? (La tensione è la forza vincolare esercitata dal filo.)

[28 N]

4. L'EFFETTO DI PIÙ FORZE SU UN CORPO RIGIDO

DOMANDE SUI CONCETTI

31 Due mani impugnano il volante di un'automobile per farlo ruotare.

▶ Come sono tra loro le forze esercitate dalle mani?

32 Il lancio di un paracadutista è frenato dal paracadute agganciato con delle funi a un'imbragatura.

▶ Le forze esercitate dalle funi come sono tra loro?

33 **SPORT Impugnare il bilanciere**

Un leggero bilanciere con due masse identiche alle estremità è appoggiato sul pavimento. Cerchi di sollevarlo con una mano sola impugnandolo non al centro.

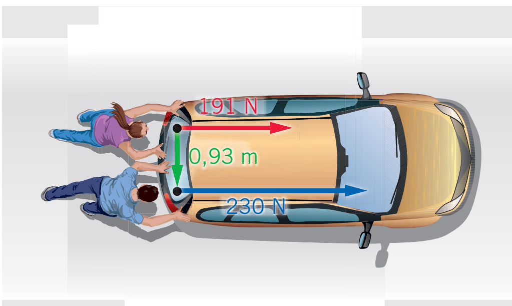
▶ Cosa succede? Rappresenta con un disegno le forze agenti e la forza risultante.

ESERCIZI NUMERICI

38 **PROBLEMA SVOLTO**

L'auto in panne

Angelo e Teresa stanno spingendo la loro auto in panne dal retro. La distanza tra le direzioni delle forze è 93 cm. Angelo esercita una forza di 230 N, Teresa di 191 N.



▶ Calcola l'intensità della forza risultante.

▶ Calcola la distanza tra i punti di applicazione delle forze esercitate dai ragazzi e il punto di applicazione della risultante.

DATI E INCOGNITE

	GRANDEZZE	SIMBOLI	VALORI	COMMENTI
DATI	Forza	F_A	230 N	Forza esercitata da Angelo
	Forza	F_T	191 N	Forza esercitata da Teresa
	Distanza	d	0,93 m	Distanza tra le direzioni delle forze
INCOGNITE	Distanza	d_T	?	Distanza tra la direzione della forza di Teresa e la risultante
	Distanza	d_A	?	Distanza tra la direzione della forza di Angelo e la risultante

RAGIONAMENTO

- Le forze di Angelo e Teresa sono parallele e concordi, quindi la risultante è applicata in un punto compreso tra le due forze.
- L'intensità della risultante è la somma delle intensità delle forze esercitate dai ragazzi: $F_R = F_A + F_T$.
- d_T e d_A soddisfano la proporzione: $d_T : d_A = F_A : F_T$ e la loro somma è uguale a d.
- Applichiamo la proprietà del comporre alla proporzione: $(d_T + d_A) : d_T = (F_A + F_T) : F_A$ che equivale a $d : d_T = F_R : F_A$.

RISOLUZIONE

Calcoliamo l'intensità della risultante:

$$F_R = F_A + F_T = 230\,\text{N} + 191\,\text{N} = 421\,\text{N}.$$

Ricaviamo d_T dalla proporzione:

$$d : d_T = F_R : F_A \Rightarrow d_T = \frac{dF_A}{F_R} = \frac{0{,}93\,\text{m} \times 230\,\text{N}}{421\,\text{N}} = 0{,}51\,\text{m}.$$

Ricaviamo d_A dalla relazione:

$$d = d_T + d_A \Rightarrow d_A = d - d_T = 0{,}93\,\text{m} - 0{,}51\,\text{m} = 0{,}42\,\text{m}.$$

CONTROLLO DEL RISULTATO

Come ci aspettavamo la forza è applicata più vicino al punto di applicazione della forza di intensità maggiore, ovvero al punto dove spinge Angelo.

Lo stesso risultato si poteva ottenere in modo equivalente calcolando il rapporto $\frac{d_T}{d_A} = \frac{F_A}{F_T} = \frac{230\,\text{N}}{191\,\text{N}} = 1{,}20$, da cui $d_T = 1{,}20 d_A$ e sostituendo questa espressione per d_T nella relazione $d = d_T + d_A = 0{,}93$ m. Risolvendo rispetto a d_A otteniamo proprio 0,42 m.

39 ★★☆ Per spostare un armadio Paolo e Fabio spingono alle due estremità del mobile perpendicolarmente a esso. Paolo esercita una forza di 170 N, Fabio di 88 N. La distanza tra i punti di applicazione delle forze è di 125 cm.

▶ Calcola l'intensità della forza risultante.

▶ A che distanza si trova il punto di applicazione della risultante dai punti di applicazione delle forze esercitate da Paolo e da Fabio?

[$2{,}6 \times 10^2$ N; 0,43 m, 0,82 m]

40 ★★☆ Per spostare un tavolo Mario lo spinge da un lato e Lisa da quello opposto. I punti di applicazione delle forze distano 25 cm. I valori delle forze sono rispettivamente $F_2 = 158$ N e $F_1 = 59$ N.

▶ Calcola l'intensità della forza risultante.

▶ Determina le distanze tra il punto di applicazione della risultante e i punti di applicazione delle forze esercitate da Mario e Lisa.

[99 N; 0,15 m; 0,40 m]

41 ★★☆ Due operai devono trasportare una cassa del peso di 1000 N, appoggiata su un'asta lunga 2,0 m e di peso trascurabile. La cassa dista 80 cm da uno dei due operai.

▶ Quanto valgono le intensità delle forze che devono applicare gli operai per poterla sostenere?

▶ Quale dei due operai deve applicare la forza di intensità maggiore?

[400 N; 600 N]

5. IL MOMENTO DELLE FORZE

DOMANDE SUI CONCETTI

42 Perché le maniglie delle porte sono fissate nel punto più lontano dai cardini?

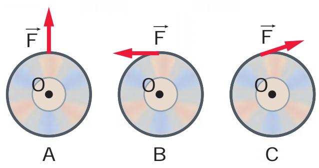
43 «Il braccio di una forza rispetto al punto O è la distanza tra il punto di applicazione della forza e il punto O.»

▶ L'affermazione è corretta? Motiva la risposta.

44 Una forza è applicata a un disco.

▶ Stabilisci in quale dei tre casi il momento della forza rispetto al centro O è maggiore.

▶ Riesci a stabilire quanto vale il momento con precisione in uno dei casi?



45 «Il momento di una forza rispetto a un punto *O* è un vettore che ha direzione perpendicolare alla retta che contiene il vettore forza.»

▶ L'affermazione è corretta? Motiva la risposta.

ESERCIZI NUMERICI

54 ★★ Per aprire una porta bisogna applicare due forze, una verso il basso all'estremità della maniglia per abbassarla, pari a 11 N, e una perpendicolare alla porta per farla ruotare sui cardini verso di noi, pari a 20 N. La maniglia è lunga 15 cm e la distanza tra la maniglia e i cardini è cinque volte la lunghezza della maniglia.

▶ Calcola il momento delle due forze rispetto al perno della maniglia e ai cardini.

▶ Rappresenta con un disegno i vettori momento delle forze. Come sono tra loro?

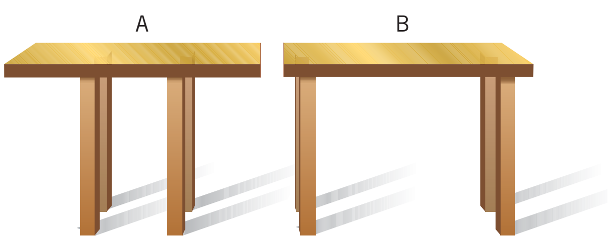
[1,7 N · m; 15 N · m]

6. L'EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO

DOMANDE SUI CONCETTI

56 Un corpo che non può traslare è senz'altro fermo?

57 Un tavolo è stabile se, quando applichiamo una o più forze in vari punti, rimane in equilibrio.

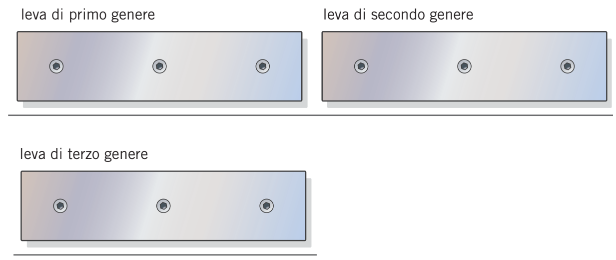


▶ Perché il tavolo A è meno stabile del tavolo B?

7. LE LEVE

DOMANDE SUI CONCETTI

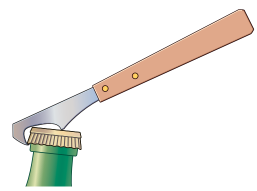
64 Hai tre leve di diverso genere. Completa i disegni scrivendo *M* nel punto di applicazione della forza motrice, *R* nel punto di applicazione della forza resistente e *F* nel fulcro.



65 Giacomo deve sollevare un oggetto molto pesante. Quale genere di leva gli conviene utilizzare?

ESERCIZI NUMERICI

72 ★★ L'apribottiglie della figura è utilizzato per togliere un tappo a corona, che oppone una forza resistente di 120 N. Il braccio della resistenza è lungo 1,2 cm, quello della forza motrice 7,2 cm.



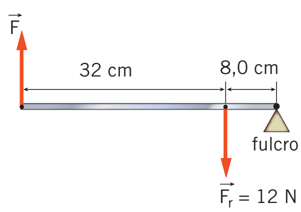
▶ Di che tipo di leva si tratta?

▶ Quale forza motrice serve per equilibrare la forza resistente?

▶ Che cosa succede se applichiamo una forza motrice maggiore di quella appena calcolata?

[20 N]

73 ★★ Nella figura è rappresentata una leva sottoposta all'azione di una forza resistente di 12 N.



▶ Quanto vale l'intensità della forza motrice in grado di equilibrare la forza resistente?

▶ Di che genere è la leva?

▶ È vantaggiosa o svantaggiosa?

[2,4 N]

74 ★★ Per rompere il guscio di una noce Sofia usa uno schiaccianoci. La noce dista dal fulcro 2,5 cm. Sofia vorrebbe esercitare una forza inferiore del 70% alla resistenza massima.

▶ A che distanza dal fulcro dovrebbe impugnare lo schiaccianoci?

[8,3 cm]

8. IL BARICENTRO

DOMANDE SUI CONCETTI

79 Prendi due bottiglie di plastica vuote identiche e versa in una un po' d'acqua.

▶ Dove si trova approssimativamente il baricentro nelle due bottiglie?

80 La sagoma di una moto di cartone è appesa al muro con una puntina in equilibrio stabile.

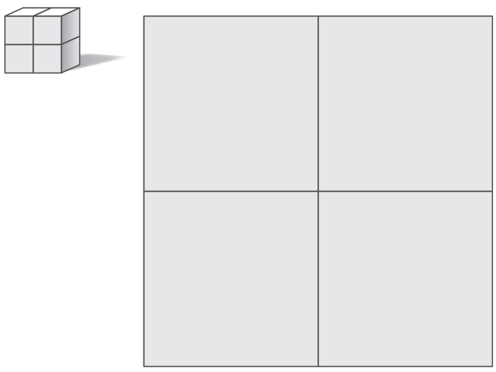
▶ Su quale retta si trova il baricentro?

▶ Come si può fare per trovare il baricentro in modo preciso?

Suggerimento: cosa succede se sposti la puntina?

ESERCIZI NUMERICI

83 ★☆☆ Quattro cubetti identici vengono sovrapposti a forma di parallelepipedo. I cubetti hanno una forza-peso che puoi rappresentare con un vettore lungo 0,5 cm.



▶ Nel disegno grande, traccia il vettore forza-peso di ciascuna parte, applicato al centro della parte stessa; poi somma i quattro vettori.

▶ Cosa rappresenta questo nuovo vettore?

▶ Cosa rappresenta il suo punto di applicazione?

84 ★★☆ Un corpo è formato da un'asta cilindrica omogenea lunga 15,0 cm e da una sfera omogenea di raggio pari a 2,0 cm attaccata a un'estremità dell'asta. Le masse dell'asta e della sfera sono rispettivamente di 11 g e 32 g.

▶ Quanto è lontano il baricentro della sfera dal baricentro dell'asta?

▶ Il baricentro del sistema è più vicino al baricentro della sfera o dell'asta?

[9,5 cm]

85 ★★☆ Un portaombrelli a forma di parallelepipedo a base quadrata viene urtato. Si inclina e a un certo istante i suoi spigoli formano un angolo di 30° con la verticale. Lo spigolo di base è lungo 20 cm e quello laterale 50 cm. Il baricentro si trova nel centro di simmetria.

▶ Cade o si raddrizza? Perché?

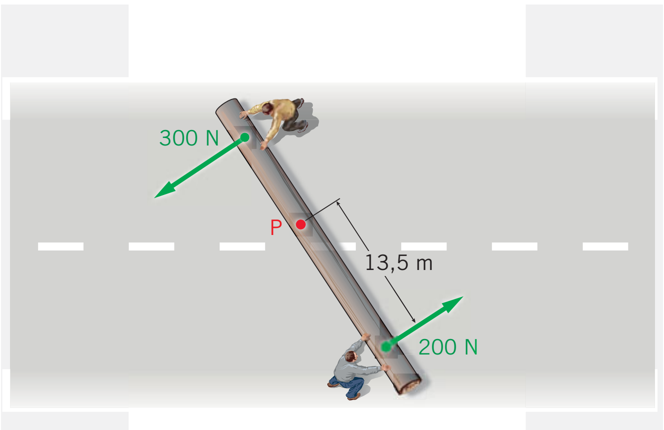
[Cade]

PROBLEMI GENERALI

6 ★★☆ Un palo è caduto di traverso sulla strada. Per portarlo a lato, due persone lo spingono ai suoi estremi, esercitando due forze parallele e discordi. I valori delle due forze applicate sono $F_1 = 200$ N e $F_2 = 300$ N. La somma delle due forze è applicata in un punto P che dista 13,5 m dal punto di applicazione della forza più piccola.

▶ Quanto misura la distanza tra P e il punto di applicazione della forza più grande?

▶ Quanto è lungo il palo?



[9,0 m; 22,5 m]

7 ★★☆ Per far ruotare un bicchiere su se stesso applichiamo con le dita di una mano due forze uguali e opposte sull'orlo, in punti diametralmente opposti e in modo che le due forze siano tangenti all'orlo stesso. Il raggio del bicchiere è di 36 mm e ciascuna delle forze ha un'intensità di 1,5 N.

▶ Traccia uno schema della situazione e determina il momento della coppia applicata al bicchiere.

▶ Se applichiamo due forze non tangenti al bordo del bicchiere il momento della coppia aumenta o diminuisce?

[0,11 N · m]

8 ★★☆ **CINEMA Nel nome della legge!**

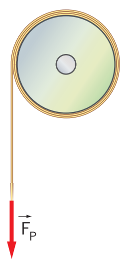
Nella scena di un film un malvivente cerca di bloccare una porta semiaperta, per impedire al poliziotto di aprirla. Il malvivente preme sulla porta a 62 cm dai cardini, con una forza di intensità 740 N. Il poliziotto spinge dall'altra parte, a 78 cm dai cardini, con una forza di 620 N.

- Quanto vale, rispetto ai cardini, il momento della forza esercitata dal malvivente?
- Quanto vale, rispetto ai cardini, il momento della forza esercitata dal poliziotto?
- Da che parte gira la porta?

[$4{,}6 \times 10^2$ N · m; $4{,}8 \times 10^2$ N · m]

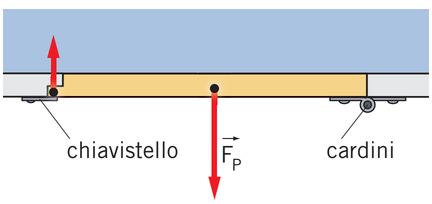
9 ★★★ Un naufrago è issato a bordo di un elicottero di soccorso mediante un cavo che si avvolge sul cilindro di un verricello. Il raggio del cilindro è di 7,5 cm e la massa del naufrago è di 83 kg.

- Quanto vale il momento della forza-peso del naufrago rispetto al centro del verricello?
- Quanto vale il momento esercitato dal motore che aziona il verricello?



[61 N · m; $M_m \geq 61$ N · m]

10 ★★★ Una botola orizzontale ha una porta larga 80 cm, con una massa di 31 kg. La porta si apre verso il basso ma, sul lato opposto a quello dei cardini, un chiavistello la tiene in equilibrio.



- Qual è il valore del momento della forza-peso rispetto ai cardini?
- Quale deve essere l'intensità della forza verticale del chiavistello?
- Di quale genere è la leva realizzata in questo modo?

[$1{,}2 \times 10^2$ N · m; $1{,}5 \times 10^2$ N]

11 ★★★ Un facchino sta tenendo ferma una valigia di 33,5 kg, appoggiata su una passerella inclinata, alta 2,40 m e lunga 10,0 m.

- Qual è il valore della forza equilibrante necessaria a tenere la valigia in equilibrio? (Usa $g = 9{,}80$ N/kg.)
- Quali sono i moduli della forza premente sul piano inclinato (in direzione perpendicolare a esso) e della forza di reazione vincolare del piano?

[78,8 N; 319 N, 319 N]

12 ★★★ Riconsidera i dati dell'esercizio precedente. Il coefficiente di attrito radente statico tra la valigia e la passerella è 0,150.

- Quali sono la direzione e il verso della forza di attrito statico? Disegna uno schema delle forze che agiscono sulla valigia.
- Determina il modulo della forza di attrito statico.
- Calcola la forza che deve essere esercitata dal facchino per tenere la valigia in equilibrio.

[47,7 N; 31,1 N]

13 ★★★ Una molla di costante elastica $190 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ è fissata al muro da una parte e dall'altra a una cassa che contiene 8 bottiglie d'acqua da 1,0 L. Il coefficiente d'attrito statico tra la cassa e il pavimento vale 0,75. Claudio trascina la cassa allungando la molla e poi la lascia andare.

- Qual è l'allungamento massimo della molla per cui la cassa rimane in equilibrio?

[31 cm]

14 ★★★ Un bicchiere che pesa 5,2 N è appoggiato su un ripiano mobile. Elena inclinando il piano scopre che l'inclinazione massima che consente al bicchiere di rimanere in equilibrio è di 13°.

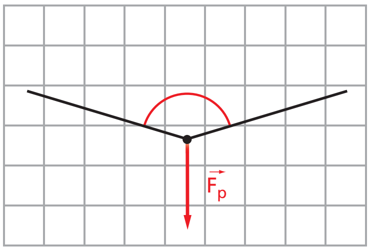
- Calcola la componente della forza-peso perpendicolare al ripiano con la pendenza massima.
- Calcola il coefficiente d'attrito tra il bicchiere e il ripiano nella condizione di massima inclinazione.

[5,1 N; 0,23]

19 **LA FISICA DEL CITTADINO Lavorare in sicurezza**

Un agricoltore appende un pesante sacco a una fune tesa tra due alberi, come è mostrato nella fotografia. Schematizzando il peso del sacco con un vettore rivolto verso il basso, esaminiamo questa situazione.

Massimiliano Trevisan



Domanda 1:

Copia la figura precedente su un foglio a quadretti.

▶ Disegna la forza risultante $\vec{F}$ che i due tratti di fune, a destra e a sinistra del sacco, devono esercitare su di esso perché il tutto sia in equilibrio.

Domanda 2:

Scomponi $\vec{F}$ lungo le direzioni dei due tratti di fune che sostengono il sacco.

▶ Le intensità dei due vettori forza che si esercitano lungo la fune, a destra e a sinistra del sacco, sono maggiori o minori del peso del sacco?

Domanda 3:

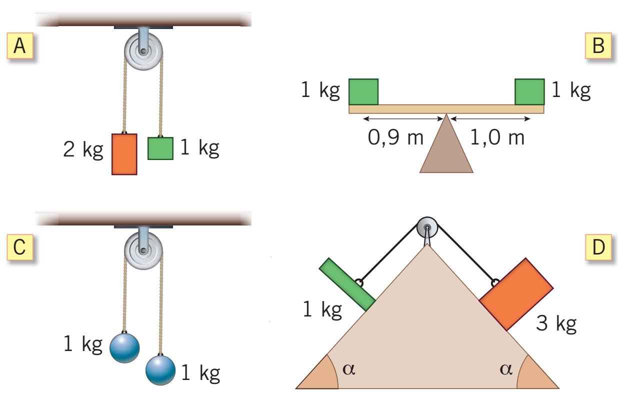
La fune a cui è appeso il sacco potrebbe rompersi, oppure potrebbe staccarsi dagli alberi a cui è legata.

▶ Ritieni che tale situazione sia la più sicura possibile? Potresti suggerire come ridurre (se possibile) il rischio di una rottura della fune o degli ancoraggi agli alberi?

[$-1,23 \times 10^3$ N; $1,82 \times 10^3$ N]

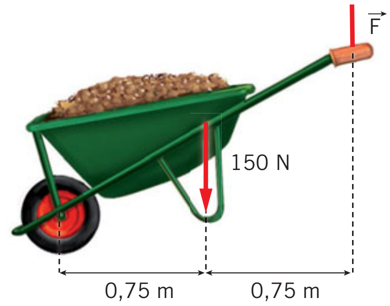
GIOCHI DI ANACLETO

2 Nei dispositivi rappresentati le funi hanno massa trascurabile rispetto ai carichi e anche gli attriti sono trascurabili, l'asse di appoggio è omogenea. Quale di essi è in equilibrio?



(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2010)

3 La carriola carica schematizzata in figura pesa 150 N ed è sostenuta alle aste con una forza $\vec{F}$. In base alle informazioni tratte dalla figura determinare il valore di $\vec{F}$.

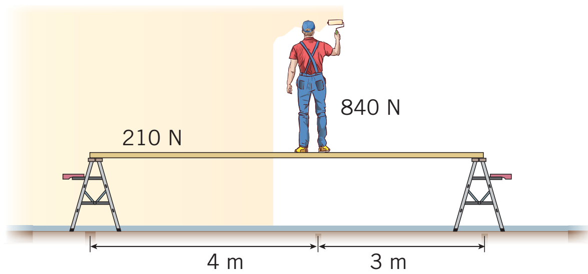


a. 300 N. **c.** 75 N.

b. 225 N. **d.** 50 N.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2009)

4 Un tale, per dipingere una parete, è salito su di un'asse appoggiata su due cavalletti, come si può vedere nella figura. L'asse, omogenea, è lunga 7 m e pesa 210 N mentre l'uomo pesa 840 N.



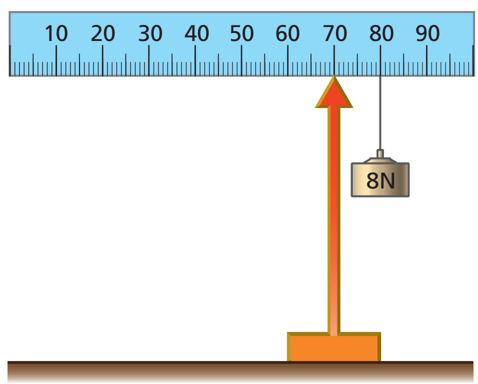
▶ Quanto vale la forza che preme sul cavalletto che si vede a sinistra nella figura quando l'uomo sta a 4 m da esso?

a. 350 N. **c.** 585 N.

b. 465 N. **d.** 1050 N.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2008)

5 Come mostrato in figura, una riga lunga 1 metro è sostenuta in equilibrio in posizione orizzontale da un perno.



▶ Il perno si trova nella posizione corrispondente a 70 cm mentre un peso di 8 N è appeso nella posizione corrispondente a 80 cm. Quanto pesa la riga?

a. 8 N. **c.** 2 N.

b. 4 N. **d.** 16 N.

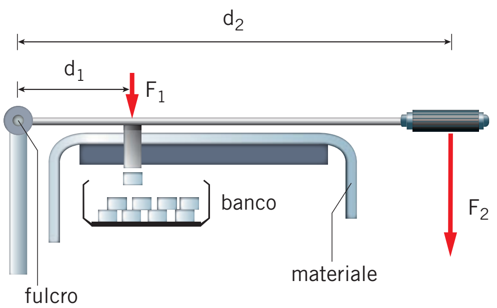
(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2007)

6 Il disegno mostra una semplice macchina che serve per forare con un punzone fogli di lamiera o di altri materiali. Per fare i fori la leva viene spinta in basso mediante la maniglia che si trova a sinistra di chi guarda.
Per forare la lamiera si deve esercitare una forza F_1 di 36 N. Fissando a 12 cm la distanza d_1 del punzone dal fulcro basta una forza F_2 di soli 3 N a spingere la maniglia in basso e ottenere il foro.

▶ Qual è allora la lunghezza minima d_2 di tutta l'asta necessaria per fare il foro?

a. 144 cm. **c.** 72 cm.

b. 60 cm. **d.** 108 cm.



(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2006)

7 Nella figura è rappresentata un'auto da corsa.

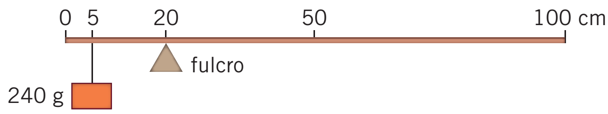
Khafizov Ivan Harisovich/Shutterstock

▶ Dove viene situato il suo baricentro da chi progetta l'automobile, e perché?

	DOVE?	PERCHÉ?
A	Più in alto possibile	Per dare all'auto maggiore accelerazione
B	Più in alto possibile	Per dare all'auto maggiore stabilità
C	Più in basso possibile	Per dare all'auto maggiore accelerazione
D	Più in basso possibile	Per dare all'auto maggiore stabilità

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2003)

8 In figura è schematizzata un'asta omogenea e lunga un metro; l'asta è appoggiata a un fulcro che non sta nel suo centro di massa e viene quindi tenuta in equilibrio sospendendovi, sulla linea dei 5 cm, una massa di 240 g.



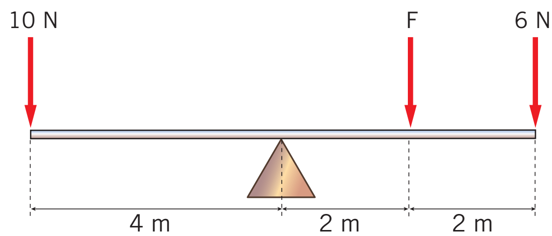
▶ Qual è la massa dell'asta?

a. 12 g. **c.** 45 g.

b. 4 g. **d.** 120 g.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2002)

9 Una sbarra uniforme poggia in equilibrio su di un cuneo sotto l'azione delle forze mostrate in figura.



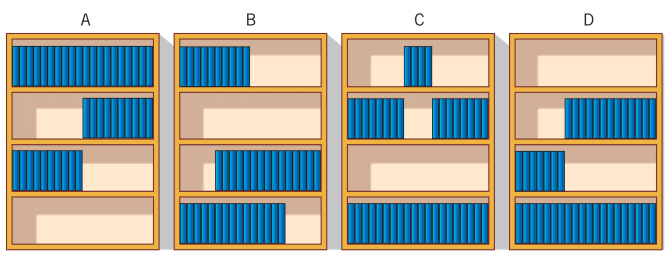
▶ Qual è l'intensità della forza F?

a. 2 N. **c.** 8 N.

b. 4 N. **d.** 14 N.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2001)

10 Nelle figure si vede la disposizione dei libri in quattro librerie identiche. Quale libreria è facile che si rovesci se viene ruotata un poco in avanti?



(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2001)

UNITÀ

B2 Richiami di ottica geometrica

TEORIA

LABORATORIO INFORMATICO

AutoCAD
Costruzione dell'immagine di un oggetto da una lente convergente

AUTOVALUTAZIONE

A. Masagué

L'ottica è il ramo della fisica che studia la luce, la sua propagazione e le sue interazioni con la materia. In questa immagine si possono vedere illustrati i fenomeni ottici principali: la trasmissione, la riflessione, la diffrazione e la rifrazione.

1. La riflessione

La **riflessione** è il fenomeno per cui i raggi luminosi vengono respinti, generalmente con direzione diversa da quella di provenienza, quando incontrano una superficie levigata che separa il mezzo in cui si propagano da un altro.

Se un *raggio di luce* proveniente da un punto luminoso *P* incontra in *M* una superficie ben **levigata**, la cui traccia sul piano del foglio sia il segmento *AB* (▶FIGURA 1*a*), esso devia secondo la direzione *MR*, dando luogo alla **riflessione**.

Il raggio *PM* si chiama **raggio incidente**, *MR* **raggio riflesso**. L'angolo *i* che il raggio incidente forma con la normale *MN* alla superficie si chiama **angolo d'incidenza**; l'angolo *r* che il raggio riflesso forma con la normale si chiama **angolo di riflessione**. Il raggio riflesso trasporta un'energia quasi uguale a quella del raggio incidente, e la superficie di separazione è una *superficie riflettente* o **specchio**.

L'esperienza ci insegna che il fenomeno della riflessione è regolato dalle due leggi seguenti (▶FIGURA 1*b*):

- Il raggio incidente, quello riflesso e la normale alla superficie riflettente, nel punto di incidenza, giacciono sullo stesso piano.
- L'angolo d'incidenza è uguale all'angolo di riflessione: $r = i$.

Se la superficie levigata è di *forma sferica* la normale nel punto d'incidenza è la direzione al centro della sfera.

È facile constatare che i prolungamenti di tutti i raggi riflessi uscenti da *P* si incontrano tutti in un punto *P′*, situato in posizione simmetrica di *P* rispetto al piano dello specchio.

Il punto *P′* si chiama **immagine virtuale** di *P*. Chi raccoglie con i propri occhi i raggi riflessi ha l'impressione che la luce provenga dal punto *P′*.

Se la luce, anziché da un punto, proviene da un corpo luminoso avente dimensioni determinate, lo specchio piano darà luogo a un'immagine virtuale perfettamente uguale e simmetrica rispetto al piano dello specchio.

FAQ

▶ Che cos'è la riflessione?

È il fenomeno fisico per il quale un raggio luminoso che intercetti una superficie levigata (detta specchio) viene deviato secondo le seguenti due leggi:

- il raggio incidente, quello riflesso e la normale alla superficie riflettente, nel punto d'incidenza, giacciono sullo stesso piano;
- l'angolo d'incidenza è uguale all'angolo di riflessione: $r = i$.

Doppia riflessione

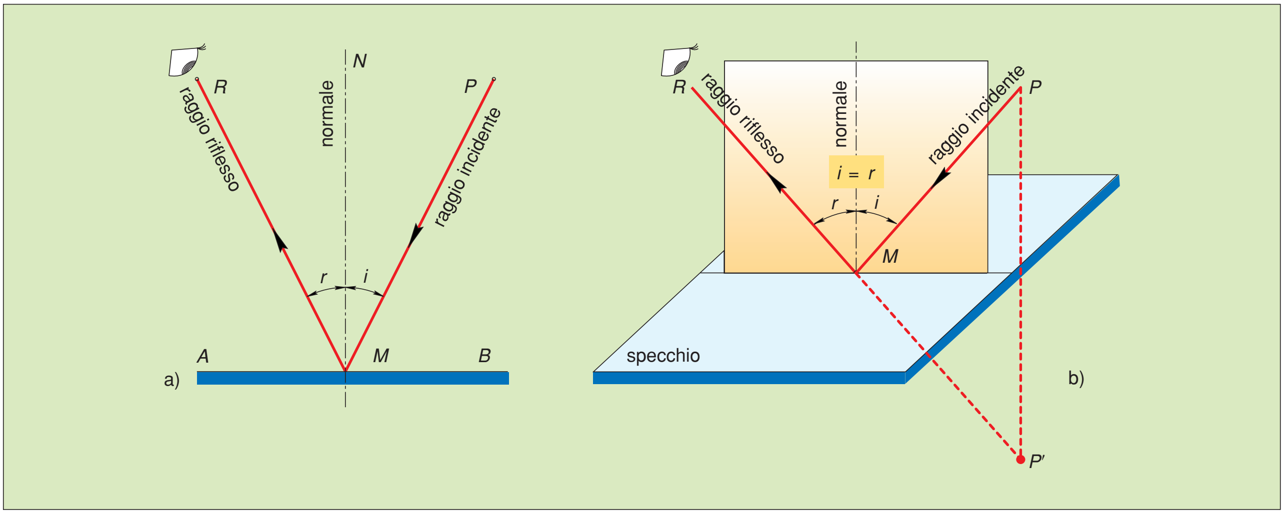


FIGURA 1 *a*) Il raggio *PM* viene respinto nella direzione *MR*.
b) Le leggi della riflessione: raggio incidente, raggio riflesso e normale appartengono allo stesso piano; l'angolo di incidenza e quello di riflessione sono uguali.

FAQ

▶ Che cos'è la rifrazione?

È il fenomeno fisico che si verifica tutte le volte che un raggio luminoso passa da un mezzo traslucido a un altro di diversa densità, seguendo le leggi seguenti:

- il raggio incidente, la normale alla superficie rifrangente e il raggio rifratto giacciono sullo stesso piano;
- il rapporto tra il seno dell'angolo *i* d'incidenza e il seno dell'angolo *r* di rifrazione, è costante e si chiama indice di rifrazione relativo: n_{12} = sen i / sen r.

2. La rifrazione

Da un punto luminoso P nell'*aria*, che chiameremo **mezzo 1**, parte un raggio PA che incontra in A la superficie dell'*acqua*, che chiameremo **mezzo 2** (▶FIGURA 2). Il raggio, anziché continuare secondo la direzione AB', devia e si propaga nell'acqua secondo la direzione AB. Si dice allora che il raggio PA ha subito la **rifrazione**. Il raggio AB prende il nome di *raggio rifratto*.

Il fenomeno della *rifrazione* si verifica tutte le volte che la luce passa da un mezzo trasparente a un altro di **diversa densità**. La superficie che separa i due mezzi si chiama *superficie rifrangente*.

La rifrazione è regolata dalle due leggi seguenti (▶FIGURA 2*b*):

- Il raggio incidente, la normale alla superficie rifrangente e il raggio rifratto giacciono sullo stesso piano.
- Il rapporto tra il seno dell'angolo i d'incidenza e il seno dell'angolo r di rifrazione, è costante e si chiama **indice di rifrazione relativo**:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n_{12}$$

Nel caso della coppia di materiali aria-acqua si ha $n_{12} = 4/3 = 1{,}33$. Se, invece, la luce passa dall'aria al vetro l'indice di rifrazione n_{12} oscilla tra 1,51 e 1,60 (poco più di 3/2). I vetri, tuttavia, non sono tutti della stessa densità; essi si dividono in due categorie: vetri **crown** e vetri **flint**. I primi sono a base di sali di *calcio* e presentano *minore densità*. I secondi, detti anche *cristalli*, sono a base di sali di *piombo* e presentano una *maggiore densità*.

Se il primo mezzo da cui la luce proviene è il **vuoto**, l'indice di rifrazione del secondo mezzo rispetto al primo, cioè rispetto al vuoto, prende il nome di indice di **rifrazione assoluto**.

Se si indica con n_1 l'indice **assoluto** di rifrazione di un certo mezzo, che consideriamo come primo mezzo e con n_2 quello di un secondo mezzo, che sup-

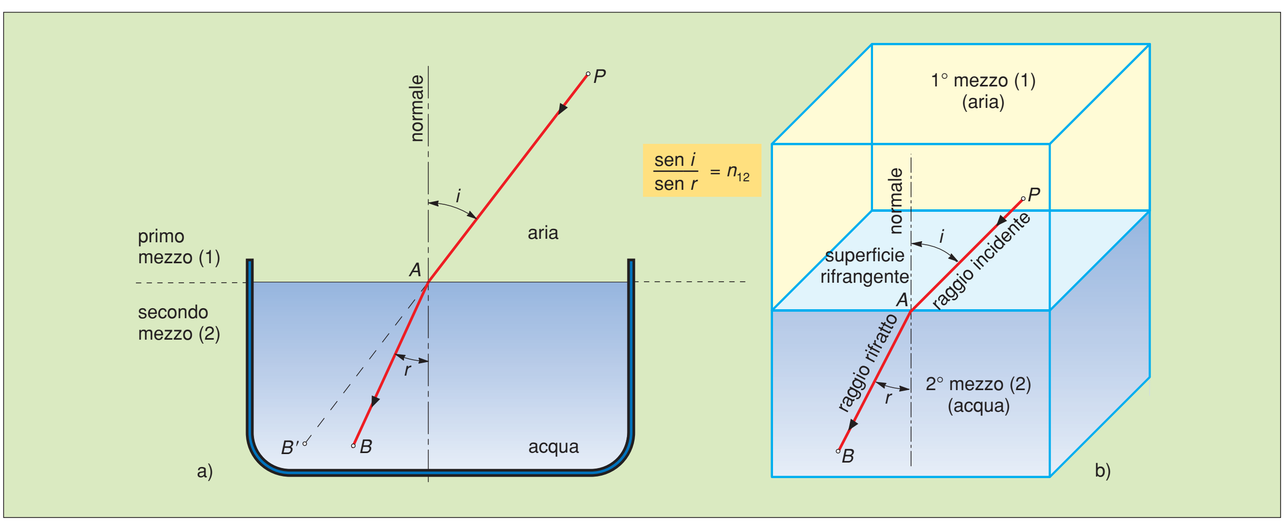


FIGURA 2 *a*) Un raggio luminoso provenendo dall'aria si rifrange nell'acqua, cioè devia, avvicinandosi alla normale della superficie di separazione aria-acqua.
b) La prima legge della rifrazione afferma che i raggi incidente e rifratto sono complanari con la normale. La seconda legge stabilisce che il rapporto tra i seni degli angoli di incidenza e di rifrazione è costante, per qualsiasi angolo di incidenza, e si chiama indice di rifrazione.

poniamo otticamente più denso, l'*indice relativo* del secondo mezzo rispetto al primo, che abbiamo indicato con n_{12}, è legato ai due indici assoluti dalla relazione:

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

Indice di rifrazione relativo di alcune sostanze rispetto all'aria:

acqua	= 1,33
vetro crown	= 1,51
vetro flint	= 1,60
diamante	= 2,46
plexiglas	= 1,48
teflon	= 1,30
alcol	= 1,36

La rifrazione atmosferica

L'atmosfera che circonda la Terra, per un'altezza media di circa 200 km, non ha **densità** costante. In effetti, via via che ci si allontana dalla superficie terrestre verso lo spazio, la densità dell'aria **diminuisce gradualmente**.

Immaginiamo che la superficie sferica di traccia MN (▶FIGURA 3), concentrica con la superficie terrestre, sia la superficie di separazione tra lo spazio vuoto e l'atmosfera, e che questa, con semplificazione grossolana, sia costituita nel suo complesso da quattro strati di densità crescente man mano che si avvicinano alla superficie terrestre. Pensiamo inoltre che nell'ambito di ciascun strato, la densità dell'aria sia costante.

Siano n_1, n_2, n_3, n_4 gli **indici di rifrazione assoluti** dei singoli strati. Sia poi S un astro dal quale si diffonde un raggio luminoso che incontra in A la superficie sferica MN con un angolo di incidenza i. Nel punto A avverrà la rifrazione e il raggio si propagherà nel 1° strato secondo la direzione AB, formante, con la **normale** alla superficie sferica MN, un angolo r minore di i. Nel punto B avverrà una seconda rifrazione e il raggio devierà secondo la direzione BC. In C, poi, una terza rifrazione, e in D l'ultima. Il raggio luminoso SA, dunque, arriverà sulla superficie terrestre nel punto E.

Un osservatore posizionato in E, raccogliendo il raggio DE, vedrà l'astro S sulla direzione EDS', cioè in una posizione più alta rispetto all'orizzonte. Dunque, quando osserviamo il cielo (prescindendo dal tempo necessario alla luce per arrivare sulla Terra) gli astri non si vedono nella loro vera posizione, ma spostati di una quantità, non costante per tutti gli astri, ma variabile in relazione alla loro altezza sull'orizzonte. Solo se un astro si trova sulla verticale, cioè in corrispondenza della direzione dello zenit, viene visto nella sua vera posizione perché i raggi luminosi diretti secondo la normale alle superfici sferiche non subiscono deviazioni.

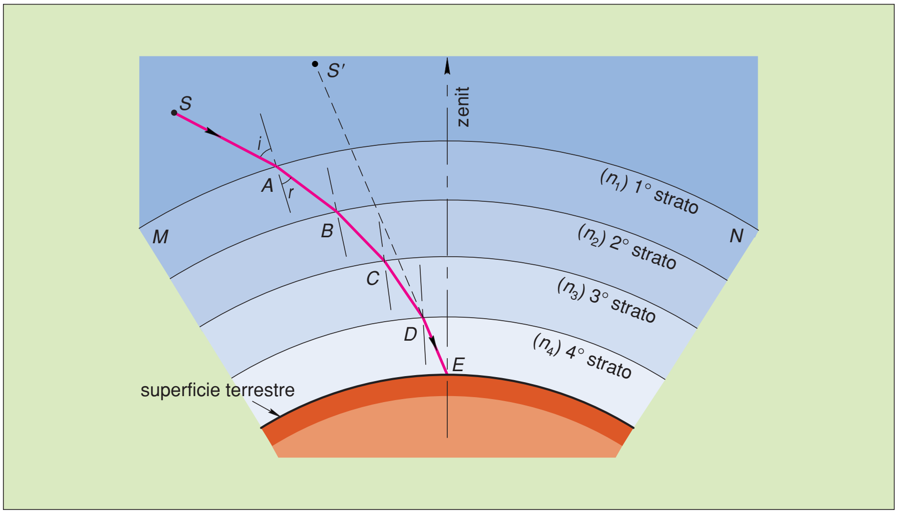


FIGURA 3 La presenza dell'atmosfera, per effetto della rifrazione, provoca la sensazione, dalla Terra, di osservare una stella in S', invece che nella sua reale posizione S.

Angolo limite

Mentre la luce, qualunque sia l'angolo d'incidenza, si propaga sempre da un mezzo meno rifrangente (meno denso) a uno più rifrangente, non così avviene quando la propagazione procede in senso inverso.

Questa ultima eventualità si verifica solo se l'*angolo d'incidenza* è inferiore a un certo angolo, che prende il nome di **angolo limite**.

Si abbia, per esempio, un recipiente pieno d'acqua (▶FIGURA 4) e sia P una sorgente luminosa puntiforme immersa nell'acqua. Dal punto P partono infiniti raggi, dei quali alcuni subiscono la rifrazione e penetrano nel secondo mezzo, cioè nell'aria, e altri invece, come i raggi PE e PF, anziché rifrangersi, si **riflettono**, come se la superficie dell'acqua funzionasse da **specchio**. Per comprendere il perché di questa riflessione basta pensare che, poiché nel passare da un mezzo più rifrangente a uno meno rifrangente la luce si *allontana dalla normale*, ne consegue che esisterà un raggio incidente al quale corrisponderà un raggio rifratto *tangente* alla superficie dell'acqua. L'angolo d'incidenza relativo al raggio PD, indicato in figura con λ, prende il nome di **angolo limite**. Esso può definirsi così:

l'angolo limite λ è quell'angolo d'incidenza a cui corrisponde un angolo di rifrazione di 90°.

Indicando con n_{21} l'indice di rifrazione dell'aria (mezzo 2) rispetto all'acqua (mezzo 1), possiamo scrivere:

$$\frac{\text{sen}\,\lambda}{\text{sen}\,90°} = n_{21} \qquad \text{cioè} \qquad \text{sen}\,\lambda = n_{21} \qquad \text{quindi}$$

l'angolo limite λ è quell'angolo il cui seno è uguale all'indice relativo di rifrazione del mezzo meno rifrangente rispetto a quello più rifrangente.

Nel caso di propagazione della luce dal vetro all'aria, ponendo:

$$n_{21} = 2/3 \qquad \text{segue} \qquad \lambda = \text{arcsen}\,(2/3) = 41°48'$$

Dunque, se un raggio di luce si propaga nel vetro, esso uscirà nell'aria solo nel caso che l'angolo d'incidenza sia minore di 41°48′.

FAQ

▶ La rifrazione si verifica sempre?

Sì se il raggio luminoso passa da un mezzo meno denso a uno più denso. Se invece il raggio luminoso passa da un mezzo più denso a uno meno denso, la rifrazione si ha solo se l'angolo di incidenza è minore dell'angolo limite.

FAQ

▶ Che cos'è l'angolo limite?

L'angolo limite è quell'angolo d'incidenza λ a cui corrisponde un angolo di rifrazione di 90°. Se l'angolo d'incidenza è minore di λ si ha la rifrazione; se l'angolo d'incidenza è maggiore di λ il raggio non esce dal primo mezzo e si ha la riflessione.

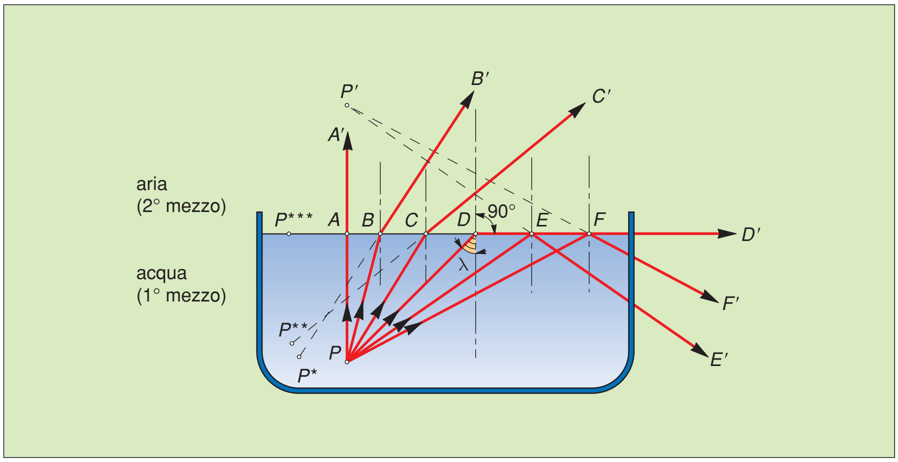


FIGURA 4 Un raggio luminoso che si propaga da un mezzo più denso a uno meno denso dà luogo al fenomeno della rifrazione solo se l'angolo d'incidenza è minore dell'angolo limite λ. In caso contrario si ottiene una riflessione del raggio e la superficie di separazione funziona come uno specchio.

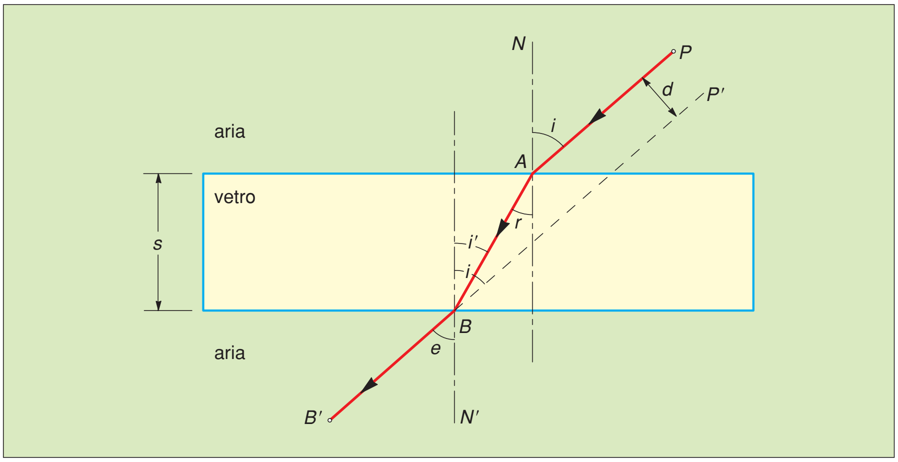


FIGURA 5 Rifrazione attraverso una lastra a facce piane e parallele. Il raggio incidente e quello emergente sono paralleli e traslati di una quantità *d*.

Rifrazione attraverso una lastra a facce piane e parallele

Supponiamo che dal punto luminoso P parta un raggio che incontra in A la superficie di un *lastra di vetro* con le facce **piane** e **parallele**, immersa nell'aria, con l'angolo d'incidenza i. In A il raggio si rifrange e devia incontrando in B la superficie di emergenza, che sappiamo parallela a quella d'incidenza (▶FIGURA 5).

L'angolo i', dato il parallelismo delle due facce, sarà uguale a r. Da B il raggio uscirà allontanandosi dalla normale con *angolo di emergenza e*. È facile constatare che il raggio BB' è **parallelo** al raggio incidente PA. Dunque si ha:

$$i = e$$

Poiché gli angoli i ed e hanno i due lati AN e BN' paralleli, dovranno avere paralleli gli altri due lati AP e BB'.

Se l'occhio di un osservatore riceve il raggio BB', vedrà la sorgente luminosa P sul prolungamento di $B'B$, cioè in direzione di P'. La **lastra** produce, dunque, l'effetto di **spostare il raggio** PA **parallelamente** a se stesso di una quantità d che dipende: dall'*angolo d'incidenza i* (espresso in radianti), dall'*indice di rifrazione relativo n* e dallo *spessore s* della lastra, secondo la seguente relazione:

$$d = s\frac{n-1}{n} i^{\text{rad}}$$

Se un raggio arriva *perpendicolare* ($i = 0^{\text{rad}}$), sappiamo che lo *spostamento è nullo*, ma se si fa ruotare la lastra di un piccolo angolo i, allora si forma l'angolo d'incidenza i e il raggio emergente si sposterà di una quantità d proporzionale alla *rotazione*.

FAQ

▶ Quale deviazione subisce un raggio luminoso che attraversa una lastra a facce piane e parallele?

Il raggio luminoso emergente dalla lastra risulta traslato (dunque parallelo al raggio incidente) di una quantità d fornita dalla seguente espressione, essendo i l'*angolo d'incidenza* (espresso in radianti), n l'*indice di rifrazione relativo* ed s lo *spessore della lastra*:

$$d = s\frac{n-1}{n} i^{\text{rad}}$$

3. Le lenti sferiche

Nei precedenti paragrafi si è visto come le leggi della *riflessione* e della *rifrazione* consentano di individuare il percorso dei raggi luminosi quando questi intercettano corpi opachi *riflettenti* o attraversano corpi *trasparenti*. Queste leggi sono alla base dei principi di funzionamento di numerosi **strumenti** e **dispositivi** di tipo ottico impiegati in topografia (in particolare *microscopi* e *cannocchiali*), nei quali i raggi luminosi sono guidati lungo un percorso predeterminato e ben organizzato in relazione alle funzioni dello strumento stesso.

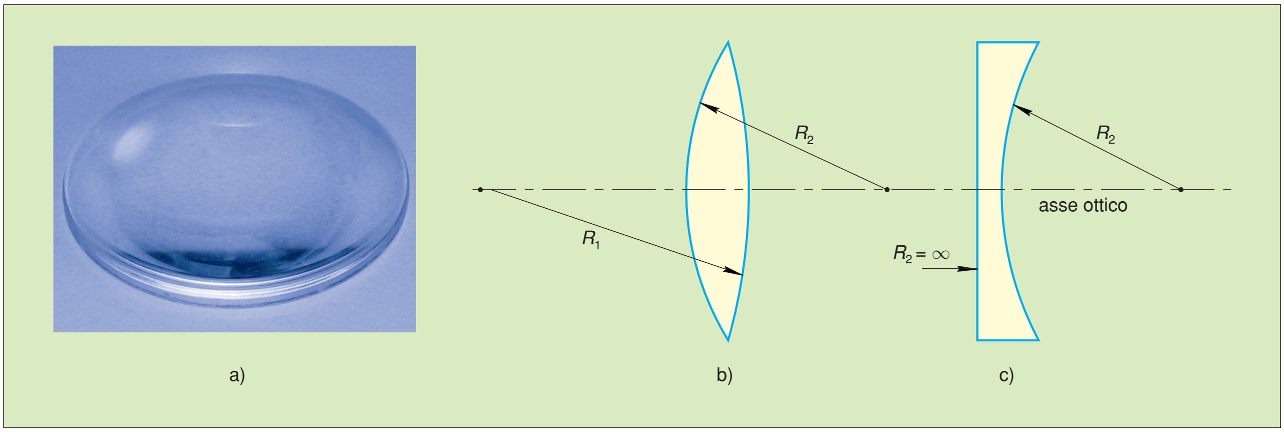


FIGURA 6 *a*) Lente sferica. I centri dei raggi di curvatura delle superfici sferiche definiscono l'asse ottico. La lente *b*) è convergente, quella *c*) è divergente.

Questi strumenti ottici contengono come parti essenziali **lenti sferiche**. Esse sono corpi costituiti da materiale trasparente (generalmente vetro), quindi *rifrangenti*, delimitati da *superfici sferiche*, in grado di produrre, pur con qualche deformazione, *immagini* ingrandite (o rimpicciolite) di un determinato oggetto.

I due **raggi di curvatura** delle superfici sferiche, unitamente alla *densità* del materiale, quindi all'*indice di rifrazione n*, costituiscono gli elementi caratterizzanti ciascuna lente definendone gli **indici** che in seguito preciseremo. Essi hanno, di solito, valori diversi dando luogo a lenti con svariate **forme,** anche molto diverse, ma che, tuttavia, dal punto di vista dell'effetto che producono, possono essere classificate in due famiglie:

- **Lenti convergenti**. Sono caratterizzate da un maggior spessore della parte centrale rispetto alle parti periferiche (▶FIGURA 6*b*). Il loro nome deriva dalla proprietà che esse possiedono di far *convergere in un punto* un fascio di raggi luminosi paralleli.
- **Lenti divergenti**. Presentano uno spessore maggiore ai bordi e sono più sottili al centro (▶FIGURA 6*c*). Quando un fascio di raggi luminosi paralleli le intercetta provocano la **dispersione** dello stesso fascio.

Un raggio luminoso che intercetta una lente subisce il fenomeno della rifrazione per due volte. Una prima volta entrando dall'atmosfera nel vetro, e una seconda volta uscendo dal vetro nell'aria. Naturalmente il raggio emergente risulta **deviato** (*rifratto*) rispetto al raggio incidente. La natura e la quantità di questa deviazione dipendono dal tipo e dalla forma della lente.

Si definisce **asse ottico** di una lente sferica quella retta che passa per i centri delle due superfici sferiche (▶FIGURA 6).

Le lenti sottili

Nella trattazione che seguirà faremo riferimento a lenti sferiche il cui **spessore** sia tanto piccolo da poter essere giudicato trascurabile rispetto alle altre grandezze in gioco (raggi di curvatura, distanze focali, ecc.). Queste lenti sono chiamate **lenti sottili**. Naturalmente si tratta di una *condizione ideale* ben difficile da realizzare nella realtà, e tuttavia necessaria per semplificare e chiarire, almeno in prima approssimazione, l'esposizione.

Si definisce **centro ottico** *O* di una lente sottile il punto che è individuato dall'intersezione della lente con l'asse ottico (▶FIGURA 7). Esso **non provoca nessuna deviazione** a qualunque raggio luminoso che lo intercetti.

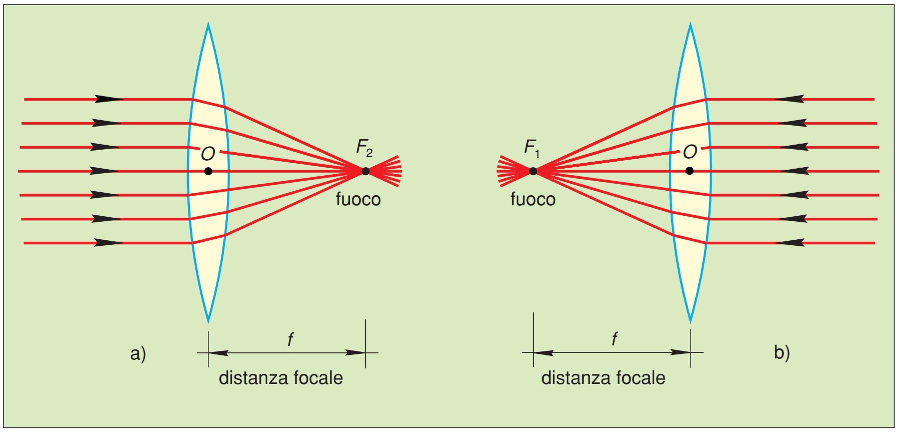


FIGURA 7 Una lente convergente rifrange un fascio di raggi paralleli all'asse ottico in un punto appartenente all'asse ottico chiamato fuoco. Dato che i raggi paralleli possono provenire da entrambi i lati della lente, ne consegue che esistono due fuochi per ciascuna lente, in generale indicati con F_1 e F_2.

Una lente sottile può essere rappresentata convenzionalmente con un segmento, perpendicolare all'asse ottico, il cui punto di mezzo rappresenta il centro ottico (►FIGURA 8); in figura questo segmento è rappresentato da una linea azzurra tratteggiata.

Le lenti sottili convergenti

Quando una *lente convergente* intercetta un fascio di raggi luminosi, con una direzione *parallela al suo asse ottico* e provenienti dalla parte sinistra della lente stessa, questi emergono dalla parte opposta della lente formando un cono luminoso che *converge* in un punto sull'*asse ottico* della lente chiamato **fuoco** (secondo fuoco) (►FIGURA 7).

Siccome il fascio di raggi paralleli all'asse ottico può arrivare sulla lente dalle due parti opposte, ne deriva che ogni lente possiede due fuochi, indicati con F_1 ed F_2 (primo e secondo fuoco), entrambi sull'asse ottico, ma dalle parti opposte della lente. In una lente sottile, anche con raggi di curvatura diversi, la distanza tra i due fuochi e il centro della lente è uguale. Essa viene chiamata **distanza focale** ed è indicata con f (►FIGURA 7).

FAQ

► Che cos'è il centro ottico di una lente sottile, e quale proprietà possiede?

Il centro ottico di una lente sottile è il punto individuato dall'intersezione della lente con l'asse ottico. Esso possiede la proprietà di non provocare nessuna deviazione a qualunque raggio luminoso che lo intercetti.

Immagine reale e immagine virtuale

L'esperienza ci insegna che se collochiamo davanti a una lente convergente un **oggetto**, a meno che questo sia molto vicino alla lente (meno della distanza foca-

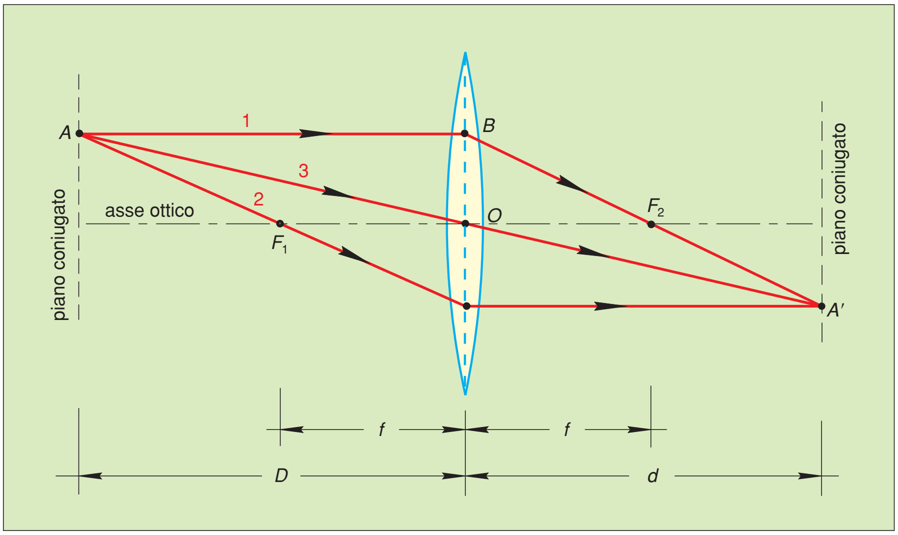


FIGURA 8 Regole per la formazione dell'immagine dell'oggetto puntiforme *A*. Dei tre raggi luminosi uscenti da *A*, solo due sono indispensabili per costruire l'immagine.

le), è possibile raccogliere l'**immagine** di questo oggetto su uno schermo opportunamente posizionato sul lato opposto rispetto alla lente. Essa è **reale** (perché è possibile raccoglierla su uno schermo) e *capovolta*.

La stessa esperienza insegna che se l'oggetto si trova molto vicino alla lente, cioè meno della *distanza focale*, non è possibile raccogliere un'immagine sullo schermo. In questo caso, tuttavia, guardando l'oggetto attraverso la lente si può cogliere un'immagine *diritta* e *ingrandita*. Essa, non potendo essere raccolta su uno schermo, viene detta **virtuale**.

Regole per la costruzione delle immagini formate dalle lenti sottili convergenti

Se consideriamo una sorgente luminosa puntiforme A (▶FIGURA 8), alla sinistra del primo fuoco di una lente convergente, la sua immagine (*reale*) sarà il punto A' dove si intersecano i raggi provenienti da A dopo essere stati rifratti attraverso la lente. Per definire la **posizione** dell'immagine A' possiamo considerare *almeno due* dei tre seguenti raggi luminosi, scelti tra gli infiniti che escono da A:

- il raggio AB *parallelo all'asse ottico* (1), che è deviato dalla lente in modo da passare per il secondo fuoco F_2 della lente;
- il raggio AF_1 diretto sul *primo fuoco* della lente (2), che, quando intercetta la lente, viene deviato in modo da emergere parallelo all'asse ottico;
- il raggio AO che attraversa il *centro ottico* della lente (3); come tutti i raggi che passano per questo punto, esso prosegue senza subire alcuna deviazione.

La costruzione delle **immagini** nelle lenti sottili, dunque, viene facilitata dalle seguenti regole pratiche confermate dall'esperienza:

- un raggio di luce parallelo all'asse ottico esce dalla lente dirigendosi al secondo fuoco;
- un raggio di luce che passi per il primo fuoco, uscendo dalla lente, sarà parallelo all'asse;
- un raggio diretto al centro ottico non subisce alcuna deviazione.

Si potrebbe dimostrare che tutti i *punti oggetto* situati sul piano perpendicolare all'asse passante per A, avranno le corrispondenti *immagini* sul piano normale all'asse passante per A'. I due piani, l'uno passante per A e l'altro passante per A', si chiamano **piani coniugati**.

Equazione delle lenti sottili

Assegnata una lente sottile convergente, le *distanze* D e d (rispettivamente dell'oggetto e dell'immagine dalla lente) e la *distanza focale* f della lente sono legate da una *relazione* fondamentale.

Con riferimento alla ▶FIGURA 9, immaginiamo che, per semplicità espositiva, l'oggetto sia costituito da un segmento rettilineo AB, ortogonale all'asse ottico e con l'estremo A su di esso. La sua immagine $A'B'$ viene costruita con le regole enunciate in precedenza. Poiché la lente è di spessore trascurabile, possiamo ipotizzare che tutta la rifrazione abbia luogo quando i raggi luminosi attraversano il piano normale all'asse ottico passante per il centro O della lente. Con queste ipotesi, considerando i due triangoli **simili** ABO e $A'B'O$ e quelli, pure simili, OPF_2 e $A'B'F_2$ con $OP = AB$, si ottiene la seguente espressione:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{D} + \frac{1}{d}$$

FAQ

▶ Quale legge regola la rifrazione della luce provocata da una lente sottile?

Le lenti sottili provocano la rifrazione della luce seguendo la seguente legge:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{D} + \frac{1}{d}$$

in cui f è la distanza focale, D è la distanza dell'oggetto dalla lente e d la distanza dell'immagine dalla lente.

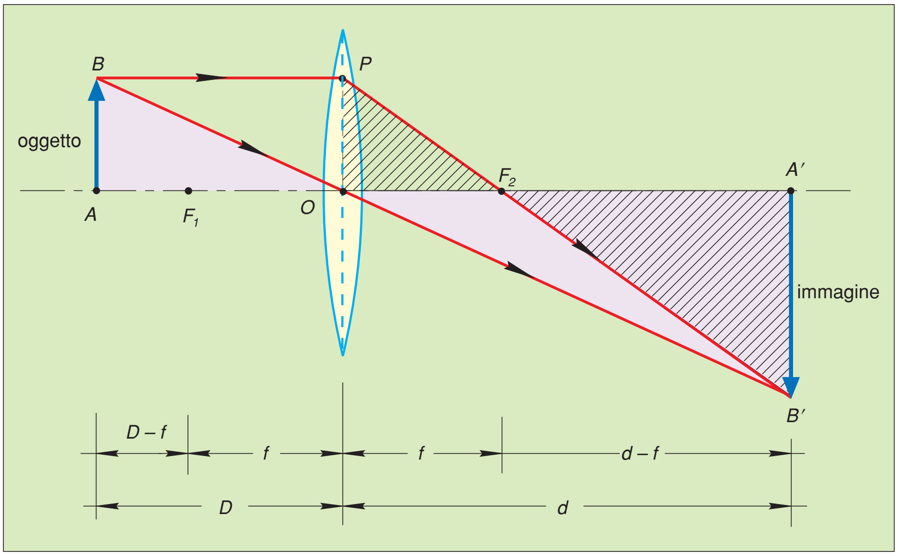


FIGURA 9 Le distanze D e d dell'oggetto e dell'immagine dalla lente, e la distanza focale f della stessa lente, sono legati da una relazione chiamata legge delle lenti sottili.

Questa relazione prende il nome di **equazione delle lenti sottili** (o di *Huygens*). Con essa, se conosciamo la distanza focale f della lente e la distanza D dell'oggetto dalla lente, siamo in grado di calcolare a quale distanza d si forma l'immagine.

Il rapporto $1/f$ viene chiamato **potere diottrico** della lente. La sua unità di misura è pertanto m^{-1}. Essa, in oculistica, viene chiamata **diottria**. Ad esempio, una lente con distanza focale $f = 20$ cm $= 0{,}20$ m, ha un potere diottrico di $1/0{,}20 = 5$ *diottrie*. Il potere diottrico si considera *positivo* per le lenti convergenti, *negativo* per quelle divergenti.

Le proprietà delle immagini formate dalle lenti sottili convergenti

In via preliminare, consideriamo i punti P_1 e P_2 appartenenti all'asse ottico, *simmetrici* rispetto alla lente, e distanti da questa di una quantità *doppia* della distanza focale, cioè $2f$. Si possono individuare le seguenti situazioni.

- **Oggetto posto sul doppio della distanza focale.** È facile constatare che, se un oggetto rettilineo AB appartiene a un piano ortogonale all'asse ottico passante per P_1, la relativa immagine $A'B'$ sarà contenuta nel **piano coniugato** passante per il punto P_2 (▶FIGURA 10*a*). In effetti, ponendo $2f$ al posto di D nell'equazione delle lenti sottili e risolvendo rispetto a d, si ottiene: $d = 2f$.

I punti P_1 e P_2, i fuochi F_1 e F_2 e il centro ottico O sono i **punti cardinali** di una *lente sottile*.

Dunque, il segmento $A'B'$, immagine di AB, dista dalla lente la medesima quantità $2f$ di cui dista l'oggetto AB dalla stessa lente. Inoltre è anche facilmente dimostrabile che in tale situazione le *dimensioni* dell'immagine sono uguali a quelle dell'oggetto, quindi $AB = A'B'$.

- **Oggetto posto oltre il doppio della distanza focale.** Pensiamo ora che l'oggetto AB si trovi alla sinistra di P_1, cioè a una distanza dalla lente *maggiore* di $2f$ ($D > 2f$). La sua immagine $A'B'$ si verrà a formare tra il punto P_2 e il fuoco F_2, cioè a una distanza dalla lente compresa tra f e $2f$ ($f < d < 2f$). Essa è **reale**, **capovolta** e **rimpicciolita** (▶FIGURA 10*b*). Si può constatare facilmente che se l'oggetto AB si allontana dalla lente (aumentando D), la sua immagine tende

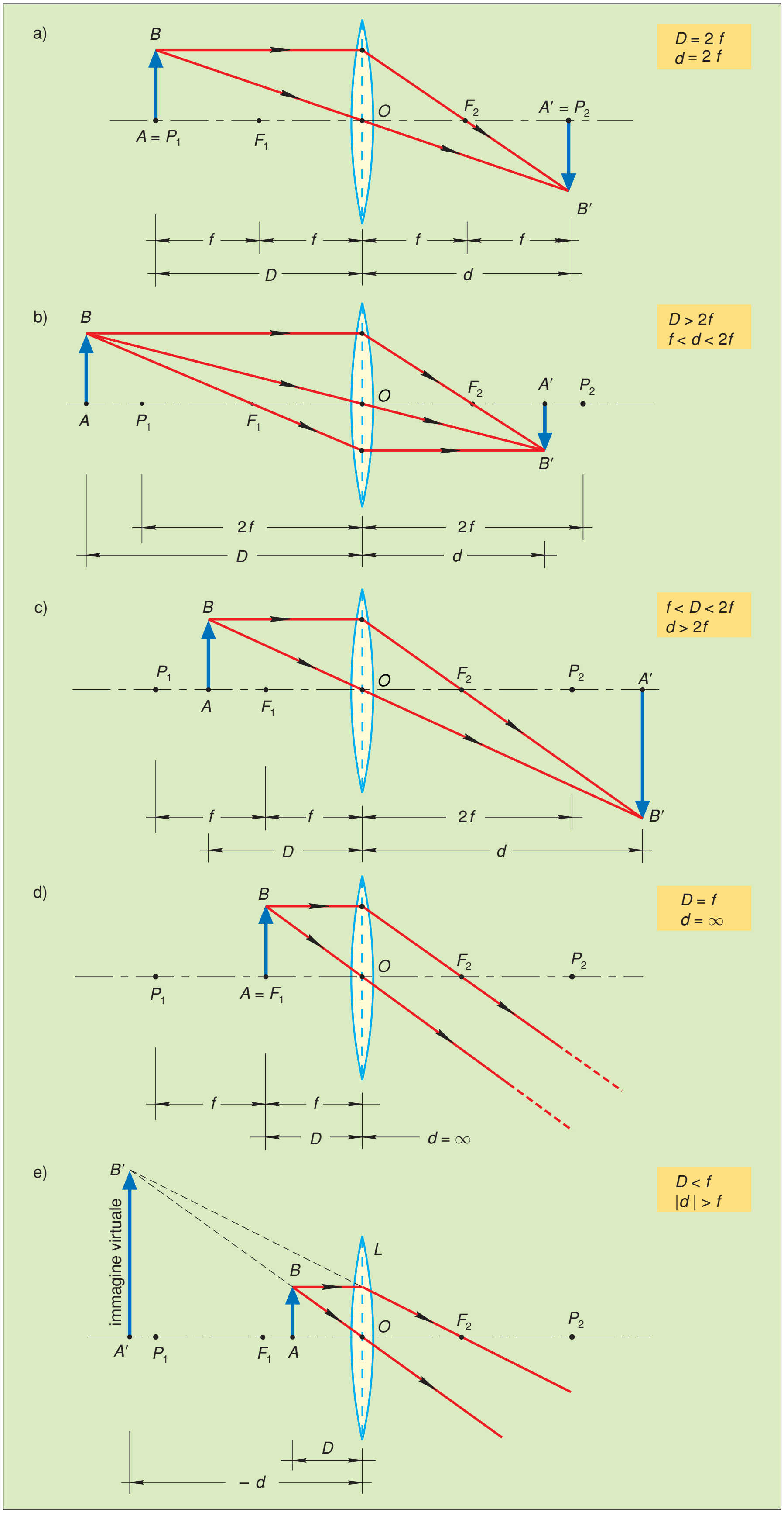


FIGURA 10 *a*) L'oggetto *AB* si trova a una distanza 2*f* dalla lente, la sua immagine *A′B′* si trova alla stessa distanza 2*f* dalla lente, ha la stessa dimensione ed è reale e capovolta. *b*) L'oggetto *AB* è alla sinistra di P_1, dunque dista dalla lente più del doppio della distanza focale ($> 2f$). L'immagine *A′B′* si forma oltre il fuoco F_2, ma a una distanza minore di 2*f*, quindi prima di P_2. Essa è reale, capovolta e rimpicciolita. *c*) L'oggetto *AB* si trova tra il fuoco F_1 e il punto P_1, quindi a una distanza dalla lente compresa tra *f* e 2*f*. L'immagine *A′B′* è reale, capovolta, ingrandita e si forma oltre il punto P_2, quindi oltre il doppio della distanza focale. *d*) Collocando l'oggetto *AB* sul fuoco F_1, l'immagine non si forma. I raggi emergenti sono paralleli, quindi non convergenti su un punto. *e*) L'oggetto *AB* si trova tra il fuoco F_1 e la lente, quindi a una distanza dalla lente minore di *f*. Il raggio parallelo all'asse ottico e quello passante per il centro *O* divergono al di là della lente, mentre i loro prolungamenti si incontrano dietro l'oggetto nel punto *B′*. L'immagine *A′B′* è virtuale, diritta, ingrandita, e la distanza dalla lente alla quale si forma è considerata negativa.

ad avvicinarsi al fuoco F_2 e va sempre più rimpicciolendosi. Se poi l'oggetto AB si porta a distanza infinita ($D = \infty$), l'immagine si riduce a un *punto* coincidente con il fuoco F_2.

- **Oggetto posto tra il fuoco e il doppio della distanza focale.** Se invece l'oggetto rettilineo AB è situato tra P_1 e il fuoco F_1, cioè distante dalla lente di una quantità D *minore di* $2f$, ma *maggiore* di f ($f < D < 2f$), l'immagine $A'B'$ è compresa tra il punto P_2 e l'infinito, quindi $d > 2f$. Essa è **reale**, **capovolta** e **ingrandita** (▶FIGURA 10*c*). Si può constatare che, se l'oggetto si sposta avvicinandosi a F_1, l'immagine corre, ingrandendo rapidamente le sue dimensioni, verso l'infinito.
- **Oggetto posto sul fuoco.** Se si pone l'oggetto AB sul piano focale passante per F_1 ($A \equiv F_1$), quindi con $D = f$, l'immagine sarà **infinitamente grande** e **infinitamente lontana**. I raggi emergenti dalla lente risultano paralleli (▶FIGURA 10*d*).
- **Oggetto posto tra il fuoco e la lente.** Se, infine, l'oggetto viene posto tra il fuoco F_1 e la lente, quindi con $D < f$, i raggi emergono dalla lente *divergenti* (▶FIGURA 10*e*). L'immagine reale, dunque, **non può formarsi**. I prolungamenti dei raggi emergenti si incontrano nel punto B'. Un osservatore che raccolga col suo occhio i raggi emergenti, ha la sensazione che l'oggetto sia nella posizione $A'B'$. L'immagine si dice allora **virtuale**, ed è **ingrandita** e **diritta**. La posizione dell'immagine si può calcolare risolvendo rispetto a d l'equazione delle lenti sottili, nella quale, tuttavia, al posto di d occorre sostituire $-d$, per tener conto che l'immagine si forma dalla stessa parte dell'oggetto ($1/f = 1/D - 1/d$).

Le lenti sottili divergenti

Mentre una lente convergente fa convergere un fascio di raggi paralleli all'asse ottico, dopo la rifrazione, nel fuoco, una lente divergente, nelle stesse condizioni, **disperde** il fascio di raggi paralleli, allontanandoli dall'asse ottico. I prolungamenti di questi raggi, tuttavia, si intersecano nel fuoco F_2 che si trova dalla stessa parte da cui proviene il fascio di raggi paralleli (▶FIGURA 11*a*).

Esso, pertanto, viene detto **virtuale**, e la sua distanza dalla lente (*distanza focale*) deve essere considerata **negativa** ($-f$).

Naturalmente l'equazione delle lenti sottili rimane del tutto valida anche per le lenti divergenti. Tuttavia, nella sua applicazione, occorre rammentare di assegnare, per quanto appena detto, un valore *negativo* alla distanza focale f e alla distanza d a cui si forma l'immagine.

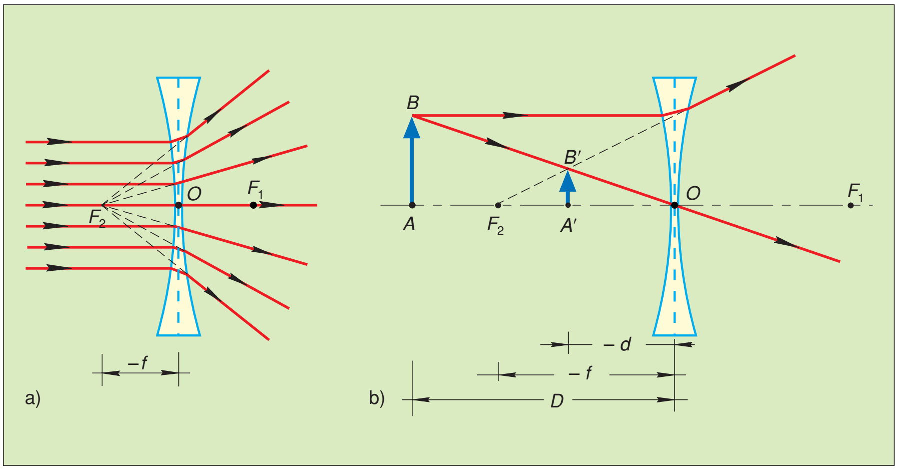


FIGURA 11 *a*) Un fascio di raggi paralleli all'asse ottico emerge divergendo dalla lente divergente. I prolungamenti di questi raggi si intersecano nel fuoco F_2 dalla stessa parte di provenienza dei raggi. Esso pertanto è virtuale e la distanza focale è negativa. *b*) Nelle lenti divergenti, qualunque sia la posizione dell'oggetto, l'immagine è sempre virtuale, diritta e più piccola dell'oggetto.

FAQ

▶ Che cos'è l'ingrandimento lineare di una lente sottile convergente?

Viene indicato con I_l ed è il rapporto tra la grandezza dell'immagine e quella corrispondente dell'oggetto, quindi: $I_l = A'B'/AB$. Esso viene calcolato con la seguente espressione:

$$I_l = \frac{f}{D - f}$$

Nella costruzione dell'immagine di un oggetto fornita da una lente divergente, si usano le stesse *regole* appena viste per le lenti convergenti. Comunque sia, occorre subito dire che, per qualunque posizione dell'oggetto rispetto alla lente, le lenti divergenti forniscono sempre e comunque un'immagine **virtuale**, **diritta** e **rimpicciolita**.

Ingrandimento lineare di una lente sottile

Consideriamo la lente **convergente** di distanza focale f rappresentata in ▶FIGURA 12. In essa si osserva che dell'oggetto, distante D dalla lente (con $D > f$), viene fornita l'immagine $A'B'$ che si forma alla distanza d dalla stessa lente. Possiamo formulare la seguente definizione:

Si definisce **ingrandimento lineare** I_l il rapporto tra la grandezza dell'immagine e quella corrispondente dell'oggetto:

$$I_l = \frac{A'B'}{AB}$$

Considerando i due triangoli simili ABO e $A'B'O$, possiamo scrivere:

$$I_l = \frac{A'B'}{AB} = \frac{d}{D}$$

Sostituendo a d il corrispondente valore ricavato dall'*equazione delle lenti sottili* [$d = f \cdot D/(D - f)$], si ottiene:

$$I_l = \frac{f}{D - f}$$

Quando $I_l > 1$ l'immagine è *più grande* dell'oggetto, quando $I_l < 1$ l'immagine è *più piccola* dell'oggetto. La definizione di ingrandimento appena enunciata vale anche per le **lenti divergenti**, con l'accortezza di adottare il *valore assoluto* di f in quanto, per definizione, l'ingrandimento può essere minore di 1 (immagini rimpicciolite) ma non negativo.

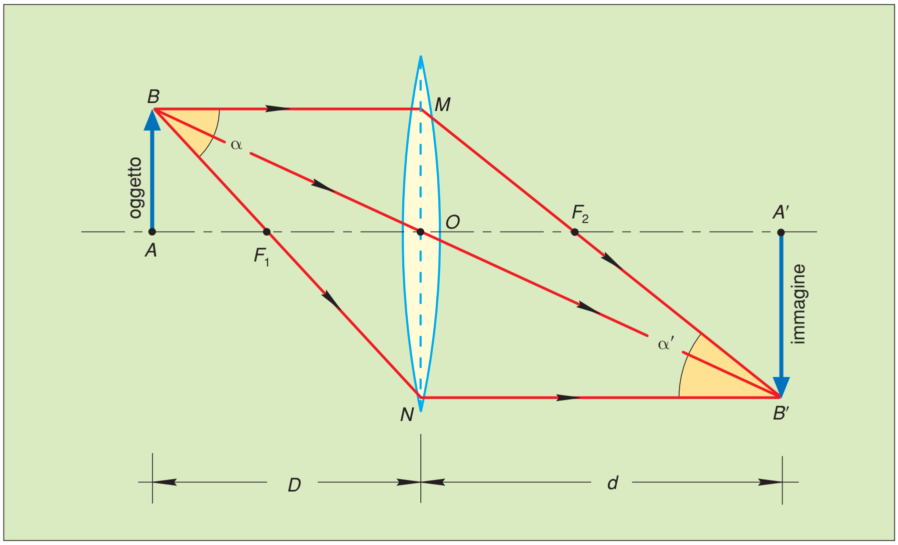


FIGURA 12 Per ogni lente convergente è possibile definire un ingrandimento lineare e un ingrandimento angolare.

Ingrandimento angolare di una lente sottile

Si definisce **ingrandimento angolare** I_α il rapporto tra l'angolo α' (in radianti) formato da due raggi *emergenti* e l'angolo α (in radianti) formato dai corrispondenti raggi incidenti (▶FIGURA 12):

$$I_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Nella realtà gli angoli α' e α sono *molto piccoli* in quanto gli oggetti osservati dalle lenti, nella pratica, sono di *modeste dimensioni* (la ▶FIGURA 12 è molto deformata per esigenze didattiche). È pertanto lecito sostituire al *rapporto degli angoli*, espressi in radianti, quello delle corrispondenti *tangenti* ($\alpha' \cong \text{tg}\,\alpha'$ e $\alpha \cong \text{tg}\,\alpha$), sicché si ha:

$$I_\alpha = \frac{\text{tg}\,\alpha'}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{D}{d}$$

Come in precedenza, sostituendo a d il corrispondente valore ricavato dall'equazione delle lenti sottili, in definitiva si ottiene:

$$I_\alpha = \frac{D - f}{f}$$

Da questa risulta che, in una lente convergente, l'ingrandimento angolare è l'inverso di quello lineare: $I_\alpha = 1/I_l$.

4. Sistemi di lenti

In generale, negli strumenti ottici le lenti non vengono impiegate singolarmente, ma *accoppiate* ad altre di diverse caratteristiche che hanno in comune il medesimo *asse ottico*, e che, pertanto, prendono il nome di **sistemi ottici centrati**, al fine di ottenere determinati risultati.

Basti pensare all'**obiettivo** di una macchina fotografica, che è composto da numerose lenti fissate all'interno di un corpo cilindrico opaco. Tuttavia l'esperienza comune insegna che si parla ancora di *distanza focale* dell'obiettivo della camera fotografica *al singolare*, quasi ci fosse *una sola lente* e non un sistema di più lenti. In realtà si parla al singolare in quanto ci si riferisce a una *lente ideale*, detta **lente risultante**, che possiede la proprietà di procurare gli stessi effetti ottici forniti dal sistema di lenti.

Dunque, l'accoppiamento di due lenti sottili aventi lo stesso asse ottico funziona, nel suo complesso, come un'unica **lente risultante,** opportunamente *dimensionata* e *posizionata*. Essa, sostituita alle lenti del sistema, è in grado di produrre gli **stessi effetti** del sistema. In sostanza possiamo dire che la lente risultante è *equivalente* al sistema ottico composto da due o più lenti sottili accoppiate.

Determinazione della lente risultante

Per definire la lente risultante consideriamo il sistema ottico costituito dalle due lenti sottili L' ed L'' (▶FIGURA 13) che possiamo immaginare *convergenti* senza, tuttavia, che questa scelta tolga nulla alla generalità del ragionamento.

Un raggio incidente parallelo all'asse inizialmente viene rifratto dalla prima lente L' dirigendosi verso il suo secondo fuoco F_2'. Ma poiché il raggio, emergendo dalla prima lente, incontra la seconda lente L'', viene da quest'ultima deviato verso l'asse ottico che incontra nel punto F.

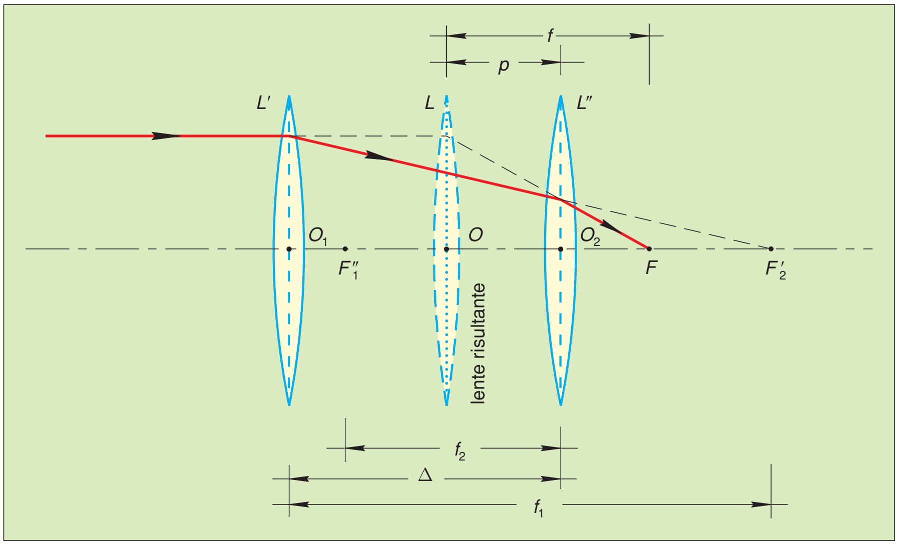


FIGURA 13 La lente risultante produce effetti equivalenti a quelli generati dal corrispondente sistema ottico centrato.

Consideriamo ora la **lente ideale** L (▶FIGURA 13) posizionata nel punto d'incontro del prolungamento del raggio incidente su L' e di quello del raggio emergente da L''.

Il punto F può essere considerato come **secondo fuoco** della lente L perché in esso converge il raggio che incide su L parallelamente all'asse ottico.

Pertanto la **lente risultante** L è equivalente al sistema composto dalle lenti L' e L'', in quanto, come l'insieme di queste due, rifrange il raggio incidente, lo devia e lo conduce nel punto F. Indicando con Δ la distanza tra le lenti L' e L'', con f_1 ed f_2 le rispettive *distanze focali*, si può dimostrare che la **distanza focale** f della *lente risultante* e la **distanza** p della lente risultante dalla seconda lente L'', sono fornite dalle seguenti formule:

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - \Delta} \qquad p = \frac{f_2 \cdot \Delta}{f_1 + f_2 - \Delta}$$

La distanza focale f della lente risultante può essere *positiva* o *negativa*, dando luogo rispettivamente a sistemi *convergenti* o *divergenti*. Anche la distanza p può essere *positiva* o *negativa*; in quest'ultimo caso significa che la lente si trova alla destra della lente L''. Il valore e il segno della distanza p definiscono la posizione della lente risultante L; essa può essere compresa tra le lenti del sistema, ma può essere anche esterna a esse.

Se il sistema di lenti è composto da più di due lenti, si calcolano inizialmente gli elementi della lente risultante delle *prime due* lenti, successivamente si calcola la risultante tra questa e la terza lente e si prosegue in modo analogo fino a considerare tutte le lenti.

Particolari sistemi di lenti

Quando le due lenti sono accostate si dicono a **contatto**. Imponendo $\Delta = 0$ nelle relazioni precedenti si ottiene:

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2} \qquad p = 0$$

cioè la *lente risultante* ha una posizione coincidente con le due lenti.

FAQ

▶ Quando un sistema di lenti sottili è detto afocale?

Quando il secondo fuoco della prima lente coincide con il primo fuoco della seconda quindi $\Delta = f_1 + f_2$ da cui $f = \infty$. Questo sistema viene detto telescopico, e un fascio di raggi incidenti paralleli all'asse di diametro h è trasformato in un fascio di raggi emergenti, ancora paralleli allo stesso asse, ma di diametro h'.

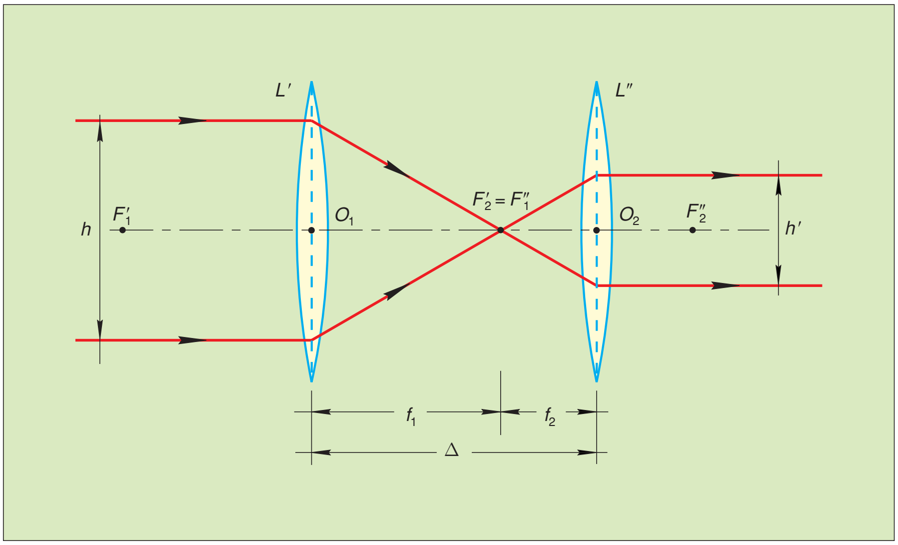


FIGURA 14 Il sistema di due lenti in posizione telescopica: la somma delle due distanze focali è pari alla distanza tra le lenti.

L'accoppiamento di due lenti si definisce **afocale** quando il secondo fuoco F_2' della prima lente coincide con il primo fuoco F_1'' della seconda (▶FIGURA 14). In questo caso si ha $\Delta = f_1 + f_2$, e, per la precedente, risulta $f = \infty$.

Questo sistema viene definito **telescopico**, e un fascio di raggi incidenti paralleli all'asse e di diametro h, è trasformato in un fascio di raggi emergenti, ancora paralleli allo stesso asse, ma di diametro h'.

È possibile definire l'*ingrandimento lineare* e l'*ingrandimento angolare* del sistema di lenti in posizione telescopica; i relativi valori sono forniti dalle seguenti semplici espressioni:

$$I_l = \frac{f_2}{f_1} \qquad I_\alpha = \frac{f_1}{f_2}$$

5. Le aberrazioni

In pratica non tutte le ipotesi ammesse nello studiare le lenti sono perfettamente realizzabili (spessore della lente non trascurabile, inclinazione dei raggi molto piccola, raggi di luce non monocromatica ecc.).

Le immagini formate da una **singola lente** non sono perciò quelle che ci si aspetterebbe dalle valutazioni teoriche, ma presentano dei **difetti** e delle **deformazioni** dette **aberrazioni**, più o meno complesse, a seconda dei casi e delle situazioni.

Si è fatta l'ipotesi della luce monocromatica e in realtà la luce solare (di cui principalmente si fa uso) e le altre di cui si dispone in pratica non sono affatto monocromatiche. La luce è costituita da un complesso di radiazioni cui corrispondono lunghezze d'onda variabili e quindi colorazioni differenti. A ciascuna radiazione corrisponde un particolare indice di rifrazione. Anche l'inclinazione dei raggi non sempre è molto piccola, come si è ammesso in teoria. Si discostano principalmente da questa condizione i raggi che investono la lente in prossimità del bordo.

FAQ

▶ Che cosa sono le aberrazioni, in quale modo è possibile eliminarle?

Per il mancato rispetto di alcune ipotesi alla base delle lenti sottili (spessore non trascurabile, luce non monocromatica), le immagini formate da una singola lente non sono esattamente quelle che ci si aspetterebbe dalle valutazioni teoriche, ma presentano dei difetti e delle deformazioni dette aberrazioni. Esse sono inevitabili se si usa una singola lente, mentre si possono ridurre sostanzialmente adottando opportuni sistemi di lenti.

FAQ

▶ In quale modo è possibile limitare l'aberrazione sferica?

Occorre realizzare la lente con un piccolo diametro e anteporre alla lente un disco opaco con un foro centrale detto diaframma, che permetta solo ai raggi luminosi prossimi all'asse ottico di raggiungere la lente, impedendo il passaggio a quelli periferici.

Le aberrazioni sono inevitabili se si usa una singola lente, mentre si possono ridurre sostanzialmente adottando opportuni **sistemi di lenti**, come avviene ad esempio per gli obiettivi dei cannocchiali o delle macchine fotografiche.

Esaminiamo ora singolarmente alcuni difetti che tali situazioni producono e osserviamo quali sono i possibili rimedi.

Aberrazioni sferiche

L'aberrazione sferica è il difetto per il quale i raggi di luce paralleli all'asse che passano per zone diverse di una lente sono focalizzati **in punti diversi**, anziché venire concentrati in un solo punto. Avviene, cioè, che i raggi marginali siano rifratti maggiormente di quelli prossimi all'asse ottico, e quindi siano focalizzati più vicino alla lente (▶FIGURA 15*a*). Ne risulta che essi, in corrispondenza dell'asse ottico, sono **dispersi** lungo un tratto di asse di lunghezza l, a partire dal fuoco F e nella direzione della lente. La grandezza l dà un'idea dell'entità dell'aberrazione di *sfericità* di cui è affetta la lente. Se una lente fosse priva di aberrazioni di sfericità, dovrebbe essere $l = 0$. Questo fenomeno diventa sempre più significativo via via che aumentano lo spessore della lente e il suo diametro.

L'effetto pratico di questa aberrazione consiste in un'immagine nitida solo nella **parte centrale**, mentre nelle **zone periferiche** la stessa immagine appare poco nitida e confusa (*sfuocata*).

Correzione dell'aberrazione sferica

I rimedi per ottenere un'immagine più nitida, quindi per ridurre l'aberrazione sferica, sono sostanzialmente due (▶FIGURA 15*b*).

- Realizzare la lente con un **piccolo diametro**, accontentandosi di un'immagine meno luminosa.
- Anteporre alla lente un disco opaco con un foro centrale, detto **diaframma**, che permetta solo ai raggi luminosi prossimi all'asse ottico di raggiungere la lente, impedendo il passaggio di quelli periferici.

Generalmente si usa la seconda soluzione, perché negli strumenti moderni si devono impiegare lenti di notevole diametro per far entrare nello strumento una grande quantità di luce; questa condizione è necessaria per ottenere un'immagine chiara e nitida di oggetti posti anche a grandi distanze dallo strumento.

Altri criteri per attenuare le aberrazioni di sfericità consistono nell'utilizzare lenti convergenti con i due raggi di curvatura molto diversi fra loro, oppure nell'accoppiare lenti convergenti con lenti divergenti, come si vedrà in seguito nel caso della riduzione delle aberrazioni cromatiche.

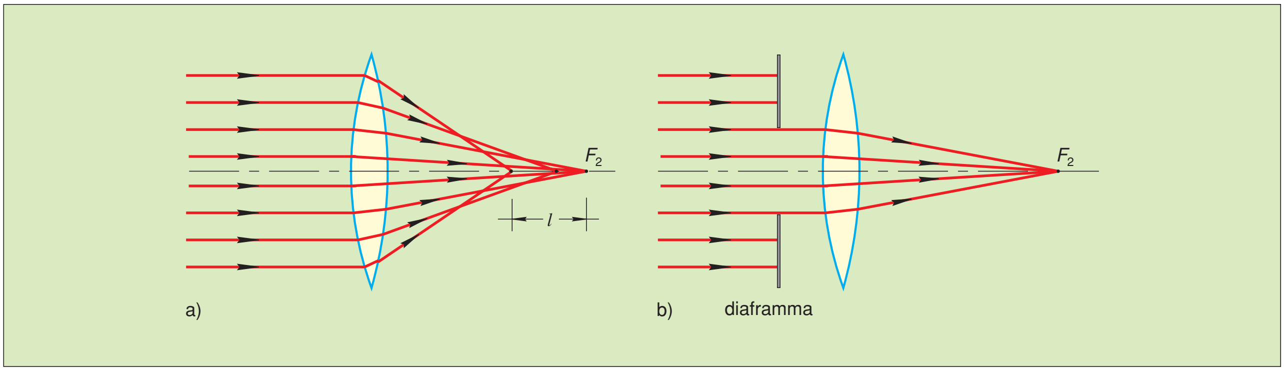


FIGURA 15 L'aberrazione sferica si produce quando i raggi paralleli all'asse non convergono sul fuoco (*a*). L'inserimento di un diaframma riduce il difetto (*b*).

Aberrazioni cromatiche

Abbiamo visto che la distanza focale di una lente dipende dai *raggi di curvatura* e dall'*indice di rifrazione* del vetro di cui la lente è costituita.

L'*indice di rifrazione* di un materiale trasparente varia poi in corrispondenza alle diverse radiazioni che compongono la luce naturale (solare), quindi a ogni radiazione monocromatica corrisponderà un **fuoco diverso**.

Ciò vuol dire che, se un raggio di luce solare, parallelo all'asse, attraversa una lente convergente, esso uscendo si *scompone* nei vari colori, e a ciascuno di essi corrisponderà un fuoco distinto. Per una lente di vetro mediamente si possono avere questi valori: per i raggi rossi $n = 1{,}513$; per i violetti $n = 1{,}532$.

I *raggi violetti* sono i più convergenti. La distanza b fra i due fuochi estremi (fuoco dei raggi rossi e fuoco dei raggi violetti) dà la misura di questo nuovo difetto detto **aberrazione cromatica**. Il *rosso* e il *violetto* sono i colori estremi dello spettro, quindi i fuochi relativi ai colori intermedi saranno compresi fra i fuochi estremi (▶FIGURA 16*a*).

L'effetto pratico di questa aberrazione, a causa della *dispersione* della luce provocata dalla rifrazione, è quello di produrre, per ogni oggetto, più immagini colorate di differenti dimensioni. Ciò provoca, in chi osserva, la sensazione di una sola immagine a **contorni iridescenti**, perché solo nella parte centrale i colori, sovrapponendosi, riproducono la luce di provenienza. La ricomposizione non può effettuarsi nelle parti estreme, donde il persistere delle colorazioni, sfumanti dal violetto al rosso.

Correzione dell'aberrazione cromatica

La correzione dell'aberrazione cromatica consiste, in pratica, nel far coincidere il fuoco dei raggi rossi con quello dei raggi violetti, mediante l'accoppiamento di due lenti (*doppietto acromatico*) delle quali una convergente costituita di vetro **crown**, a piccolo potere dispersivo, e l'altra divergente di vetro **flint** a grande potere dispersivo (▶FIGURA 16*b*). Un sistema siffatto viene detto acromatico.

Le due lenti sono poste a contatto ($\Delta = 0$) e se $|f_2| < f_1$ il sistema che ne risulta è convergente e può considerarsi praticamente *acromatico*. Per ottenere un acromatismo quasi perfetto, cioè tale che tutti i fuochi dal violetto al rosso coincidano in un unico punto, occorre accoppiare una lente convergente di vetro crown con *diverse* lenti di vetro flint.

Gli *obiettivi dei cannocchiali* sono costituiti, generalmente, da due lenti e talvolta anche da tre. L'uso di numerose lenti è invece necessario per gli *obiettivi fotografici*, nei quali le aberrazioni devono essere eliminate quasi totalmente.

FAQ

▶ In quale modo è possibile limitare l'aberrazione cromatica?

La correzione di tale aberrazione consiste nell'accoppiamento di due lenti delle quali una convergente costituita di vetro crown, a piccolo potere dispersivo, e l'altra divergente di vetro flint, a grande potere dispersivo. Un sistema siffatto viene detto acromatico.

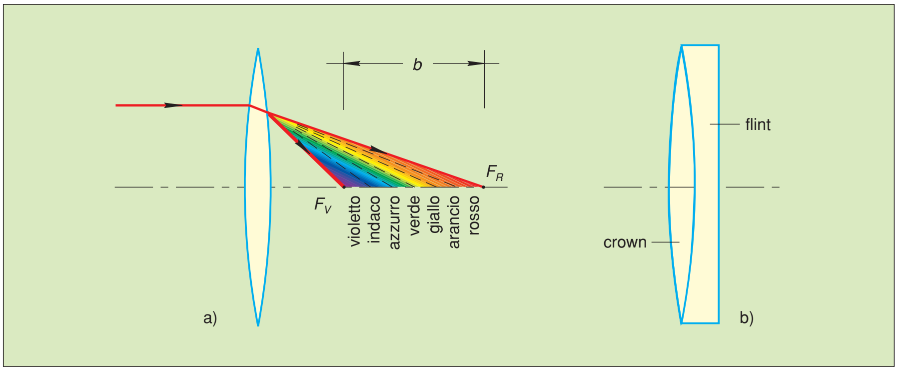


FIGURA 16 L'aberrazione cromatica genera diversi fuochi per i diversi colori della luce solare (*a*). L'uso di un sistema di due lenti a contatto, una divergente e una convergente, con diversi indici di rifrazione, costituisce un sistema detto acromatico, in grado di eliminare o ridurre questo difetto (*b*).

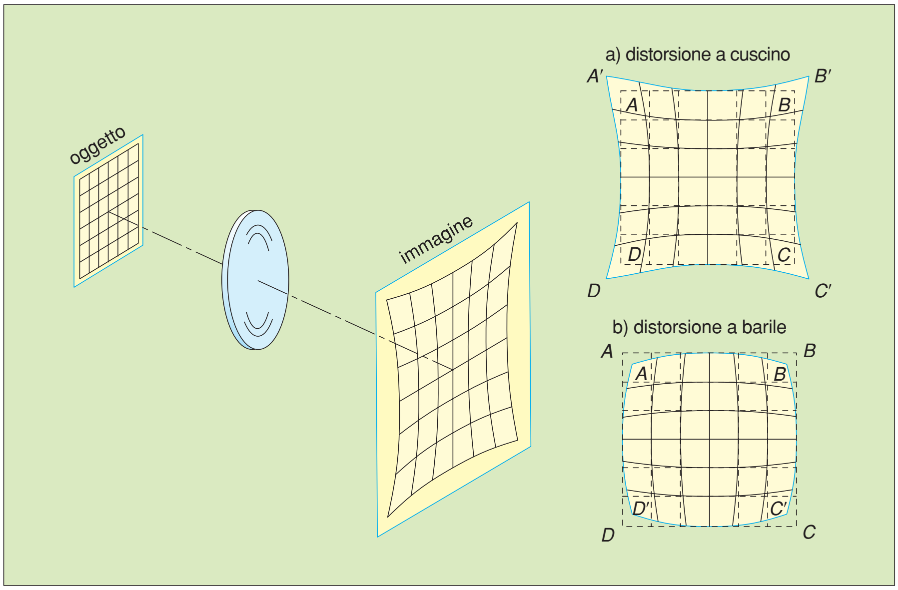


FIGURA 17 Deformazioni dell'immagine prodotte dalla distorsione a cuscino (*a*) e a barile (*b*).

Distorsioni

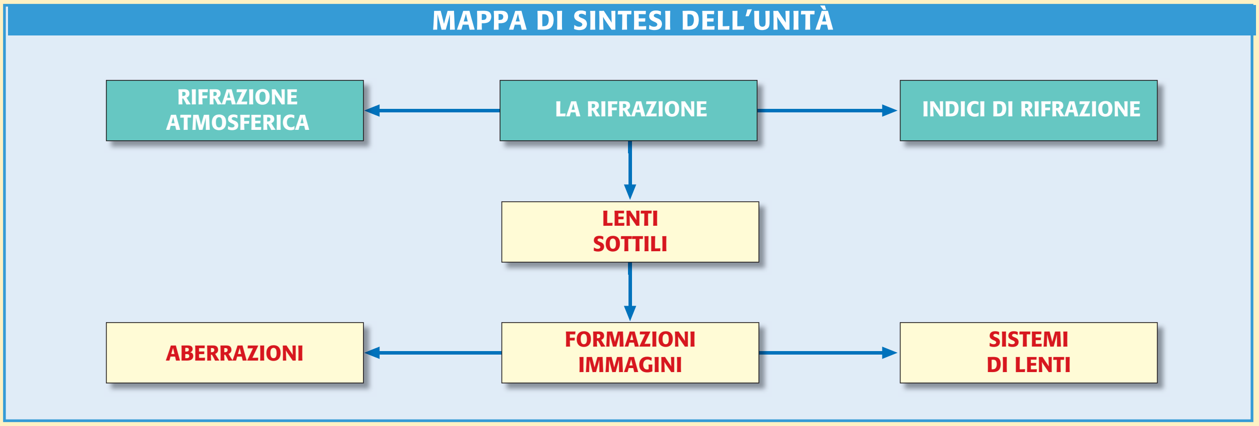
La distorsione di fatto provoca una **deformazione** dell'immagine dell'oggetto. Se si considera come oggetto un quadrato col centro sull'asse cardinale e giacente sopra un piano normale all'asse, l'immagine corrispondente, non è un altro quadrato, ma una figura deformata come quella della ▶FIGURA 17*a* se la *deformazione* è a **cuscino**, o secondo la ▶FIGURA 17*b*, se la deformazione è a **barile**.

Per correggere questo grave difetto, si usano speciali accoppiamenti di lenti chiamati **sistemi ortoscopici**. La distorsione è particolarmente grave per gli *obiettivi fotografici*, soprattutto se questi devono servire per rilievi **fotogrammetrici**.

Conclusione

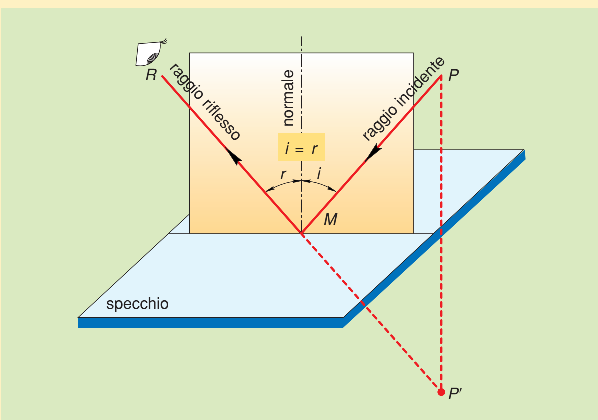
In uno strumento ottico non è possibile eliminare **contemporaneamente** tutte le aberrazioni, cioè non può esistere un sistema ottico, anche complesso, del tutto esente da aberrazioni. A seconda dell'uso cui lo strumento è destinato si cercherà di eliminare quelle aberrazioni che maggiormente ne pregiudicano il funzionamento. Per esempio, nei microscopi e nei cannocchiali è opportuno eliminare le aberrazioni **cromatiche** e di **sfericità**, mentre è poco importante la **distorsione**, perché le osservazioni vengono effettuate sempre nelle immediate vicinanze dell'asse ottico.

Riassumendo



Le leggi della riflessione: 1) il raggio incidente, il raggio riflesso e la normale alla superficie riflettente sono complanari; 2) l'angolo d'incidenza *i* è uguale all'angolo di riflessione *r*.

- L'occhio che intercetta raggi riflessi, li percepisce come provenienti da una sorgente virtuale che, rispetto allo specchio, è in posizione simmetrica a quella della sorgente reale.



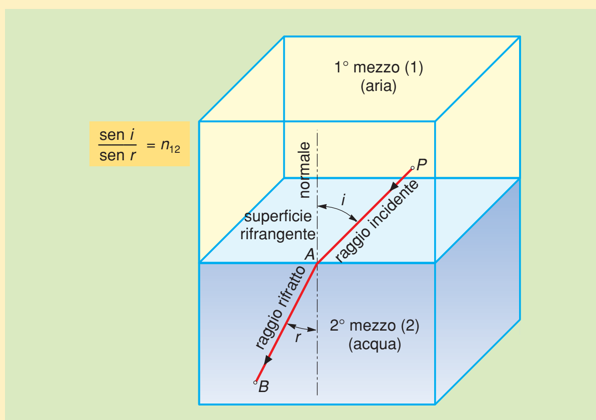
La doppia riflessione: quando un raggio subisce una doppia riflessione su due specchi formanti un angolo acuto α, il raggio riflesso forma con il raggio incidente un angolo δ doppio di α: $\delta = 2\alpha$.

- Questo principio era alla base degli squadri a specchi, disposti a formare un angolo $\alpha = 45°$, per cui la deviazione del raggio diventava $\delta = 90°$.

Le leggi della rifrazione: 1) il raggio incidente, il raggio rifratto e la normale alla superficie di separazione dei mezzi sono complanari; 2) il rapporto tra il seno dell'angolo d'incidenza *i* e il seno dell'angolo di rifrazione *r* è costante:

$$\frac{\text{sen } 1}{\text{sen } r} = n_{12}$$

Indice di rifrazione relativo di due mezzi: è la costante che compare al secondo membro della relazione precedente. Dipende dalla densità dei due mezzi trasparenti a contatto e dalla direzione rispetto a cui si muove la luce.



- Ad esempio la sequenza aria-vetro presenta un indice di rifrazione $n_{12} = 1{,}5$ circa, mentre quello per la sequenza aria-acqua è $n_{12} = 1{,}33$.
- Se si inverte la direzione del raggio luminoso, si inverte anche l'indice di rifrazione relativo. Così per la sequenza vetro-aria sarà $n_{21} = 1/1{,}5 = 0{,}6666$.

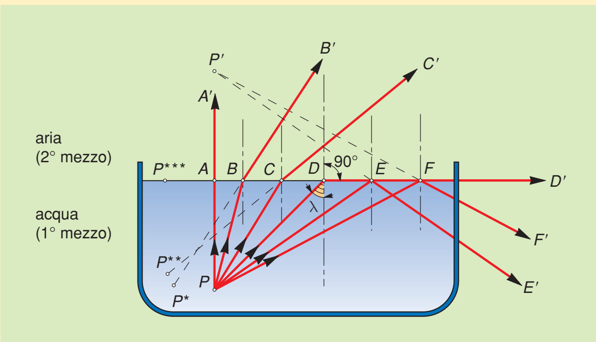
Indice di rifrazione assoluto di un mezzo: è definito come l'indice di rifrazione relativo, con la condizione che la luce entri nel mezzo trasparente (mezzo 2) provenendo dal vuoto (mezzo 1).

- Se si indicano con n_1 e con n_2 gli indici di rifrazione assoluti di due mezzi trasparenti, si ha:

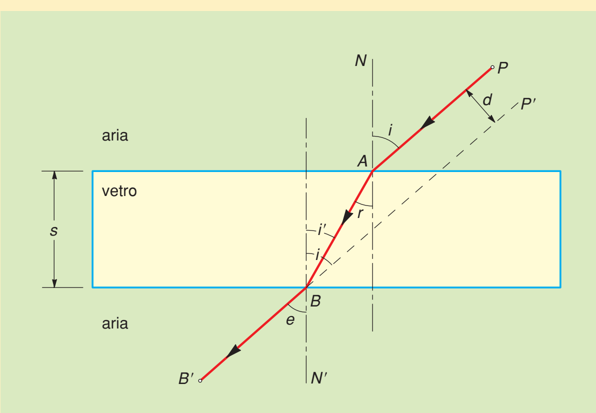
$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

Angolo limite. Quando un raggio passa da un mezzo più denso a un mezzo meno denso, l'angolo di rifrazione è maggiore dell'angolo d'incidenza. In questo contesto il valore dell'*angolo limite* è il valore dell'angolo d'incidenza in corrispondenza del quale il raggio rifratto giace sulla superficie di separazione dei due mezzi trasparenti. A esso, quindi, corrisponde un angolo di rifrazione di 90°. Se l'angolo d'incidenza è maggiore dell'angolo limite non esiste il raggio *rifratto*, e si assiste al fenomeno della *riflessione*.

- Se un raggio di luce si propaga nel vetro, esso uscirà nell'aria solo quando l'angolo d'incidenza è minore dell'angolo limite di 41°48′.



Lastra a facce piane e parallele: è un mezzo trasparente a forma di parallelepipedo. La *lastra* produce l'effetto di traslare un raggio incidente parallelamente a se stesso di una quantità *d*, che dipende dall'*angolo d'incidenza i* (espresso in radianti), dall'*indice di rifrazione relativo n* e dallo *spessore s* della lastra, secondo la seguente relazione:



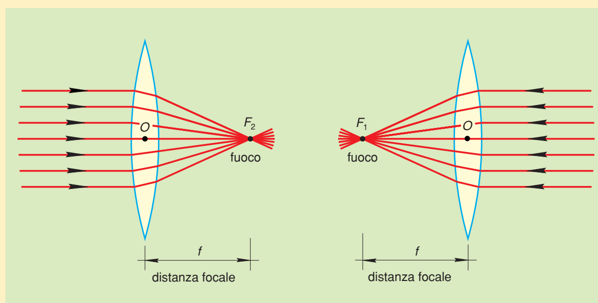
$$d = s\,\frac{n-1}{n}\,i^{\text{rad}}$$

Lenti sferiche: sono mezzi trasparenti delimitati da superfici sferiche, che in generale hanno diversi raggi di curvatura.

- Le lenti si dicono *convergenti* quando hanno uno spessore maggiore al centro rispetto ai bordi.
- Le lenti si dicono *divergenti* quando hanno uno spessore maggiore ai bordi e minore al centro.

Asse ottico: è la linea che congiunge i centri di curvatura delle superfici sferiche che delimitano la lente.

Fuochi di una lente: sono due punti posizionati sull'asse ottico. In una lente *convergente* sono i punti in cui *converge* un fascio di raggi paralleli all'asse ottico dopo essere stato rifratto dalla lente. In una lente *divergente* sono i punti in cui convergono i *prolungamenti* dei raggi appartenenti a un fascio, parallelo all'asse ottico, dopo essere stati rifratti dalla lente.



Lenti sottili: sono lenti sferiche con uno spessore tanto piccolo da poter essere giudicato trascurabile.

- In realtà si tratta di una condizione ideale, difficile da realizzare in pratica, e tuttavia necessaria per semplificare e chiarire il problema.

Centro ottico: è il punto individuato dall'intersezione della lente sottile con l'asse ottico. Esso possiede la proprietà di non provocare nessuna deviazione a qualunque raggio luminoso che lo intercetti.

- La distanza tra il centro ottico e ciascuno dei fuochi di una lente sottile si chiama *distanza focale*.

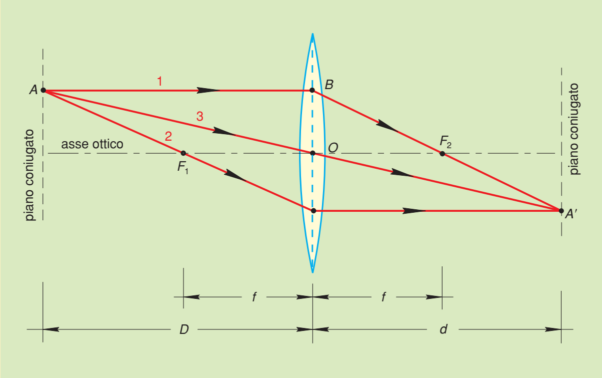
L'equazione delle lenti sottili: per una lente sottile *convergente* di distanza focale *f*, indicando con *D* la distanza a cui si trova un oggetto e con *d* la distanza a cui si viene a formare la sua immagine, esiste la seguente relazione fondamentale:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{D} + \frac{1}{d}$$

Questa relazione vale anche per le lenti *divergenti*, con l'accorgimento di attribuire il segno negativo ad f e d:

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{D} - \frac{1}{d}$$

- Conoscendo f e D, con la relazione precedente è possibile calcolare la distanza d a cui si forma l'immagine.



La costruzione delle immagini nelle lenti sottili, viene facilitata dalle seguenti regole pratiche:

1) un raggio di luce parallelo all'asse ottico esce dalla lente dirigendosi al secondo fuoco;
2) un raggio di luce che passi per il primo fuoco, uscendo dalla lente, sarà parallelo all'asse;
3) un raggio diretto al centro ottico non subisce alcuna deviazione.

Ingrandimento lineare: le lenti sono caratterizzate da un *ingrandimento lineare*, indicato con I_l. Esso è il rapporto tra la grandezza dell'immagine e quella corrispondente dell'oggetto. Tale rapporto assume poi la seguente forma:

$$I_l = \frac{d}{D} = \frac{f}{D - f}$$

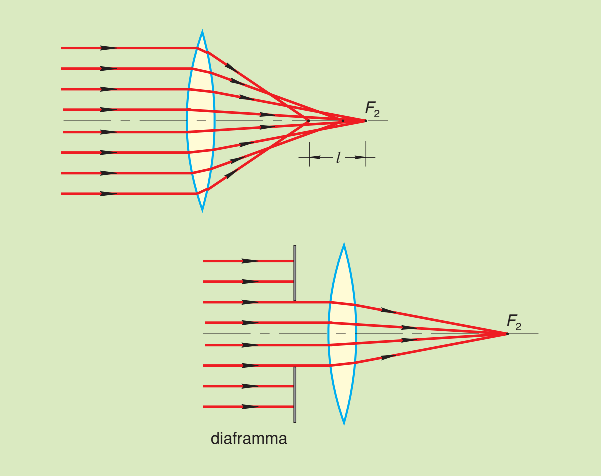
Sistemi di lenti: insieme di due (o più) lenti sottili collocate a una distanza Δ. Quando questa è nulla ($\Delta = 0$) si ha un sistema di lenti a *contatto*. Quando è uguale alla somma delle distanze focali delle due lenti ($\Delta = f_1 + f_2$) il sistema si dice *telescopico*. Gli effetti prodotti da un sistema di lenti sono riproducibili da una sola lente ideale detta *lente risultante*. La sua distanza focale e la sua distanza dalla seconda lente del sistema sono:

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - \Delta} \qquad p = \frac{f_2 \cdot \Delta}{f_1 + f_2 - \Delta}$$

- I sistemi di lenti vengono utilizzati in sostituzione di singole lenti per correggere le aberrazioni.

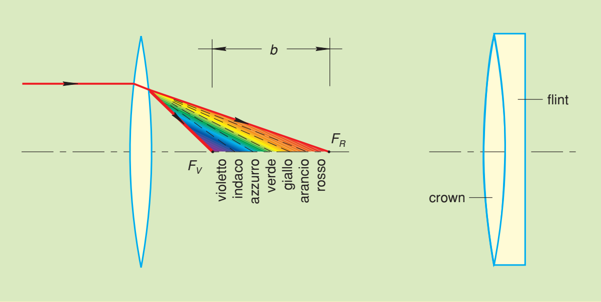
Aberrazione sferica: è il difetto per il quale i raggi di luce paralleli all'asse che passano per zone diverse di una lente sono deviati *in punti diversi*, anziché venire concentrati in un solo punto, il fuoco.

- È possibile limitare questo difetto con i seguenti accorgimenti:
  1) realizzare la lente con un *piccolo diametro*;
  2) anteporre alla lente un *diaframma* che permetta solo ai raggi luminosi prossimi all'asse ottico di raggiungere la lente, impedendo il passaggio a quelli periferici.



Aberrazione cromatica: è il difetto che genera fuochi diversi in corrispondenza dei diversi colori che compongono un raggio di luce naturale. La sensazione pratica di questo difetto è quella di un'immagine a *contorni iridescenti*, nitida solo nella parte centrale.

- È possibile limitare questo difetto usando il sistema *acromatico* formato da due lenti delle quali una convergente costituita di vetro *crown*, a piccolo potere dispersivo, e l'altra divergente di vetro *flint*, a grande potere dispersivo.



Autovalutazione

A. Verifica delle conoscenze

QUESITI A RISPOSTA SINGOLA

1 Enunciare le leggi della riflessione.

2 La riflessione di un raggio luminoso è sempre possibile?

3 Nell'ambito della riflessione, cosa si intende per immagine virtuale?

4 Che proprietà possiede un raggio luminoso dopo essere stato sottoposto a una doppia riflessione su due specchi?

5 Enunciare le leggi della rifrazione.

6 Quale differenza esiste tra indice di rifrazione relativo e assoluto?

7 In quale situazione il fenomeno della rifrazione può non esistere?

8 Che cosa è l'angolo limite?

9 In quale situazione il fenomeno della rifrazione esiste certamente?

10 Che cosa sono i fuochi di una lente sottile?

11 Come viene definito l'asse ottico di una lente?

12 Che cosa si intende per potere diottrico di una lente?

13 L'ingrandimento lineare di una lente può essere negativo? E perché?

14 Che cosa afferma la legge fondamentale delle lenti sottili?

15 Che cosa sono le aberrazioni e in che modo possono essere limitate?

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

16 Un raggio incidente viene riflesso da una superficie levigata, formando un angolo di 5° rispetto alla normale della superficie. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) l'angolo di riflessione è di 10°
b) l'angolo di riflessione è di 2°30′
c) l'angolo di riflessione è di 5°
d) la riflessione non avviene

17 Un raggio incidente arriva perpendicolarmente su una superficie levigata. Quale sarà l'angolo di riflessione?

a) 90°
b) 0°
c) 180°
d) non esiste il raggio riflesso

18 Due superfici riflettenti sono disposte con un angolo di 40^c; quale deviazione subisce un raggio riflesso su entrambe le superfici?

a) 80^c
b) 40^c
c) 20^c
d) non subisce alcuna deviazione

19 Un raggio luminoso penetra in un mezzo trasparente dall'aria con un angolo di incidenza di 60°, subendo una deviazione, con avvicinamento alla normale, di 15°. Che valore ha l'indice di rifrazione relativo?

a) 3,346
b) 1,225
c) −3,346
d) 0,816

20 Due mezzi trasparenti presentano i rispettivi seguenti indici di rifrazione assoluti $n_1 = 1{,}3$; $n_2 = 1{,}6$. Quanto vale l'indice di rifrazione relativo n_{12} del secondo mezzo rispetto al primo?

a) 1,349
b) 0,945
c) 1,498
d) nessuno dei precedenti valori

21 Un raggio luminoso penetra in uno specchio d'acqua con una inclinazione, rispetto alla superficie, di 60°. Con quale angolo rispetto alla superficie si propaga nell'acqua il cui indice di rifrazione relativo è 1,33?

a) 67°55′
b) 40°37′
c) 22°4′
d) nessuno dei precedenti valori

22 Quale elemento non condiziona la traslazione di un raggio emergente da una lastra a facce piane e parallele?

a) lo spessore *s* della lastra
b) l'angolo d'incidenza *i* sulla 1ª faccia della lastra
c) l'angolo di emergenza *e* sulla 2ª faccia della lastra
d) l'indice di rifrazione *n* della lastra rispetto all'aria

23 Una lente sottile possiede alcune fondamentali proprietà. Quale tra le seguenti è falsa?

- a lo spessore è trascurabile
- b un raggio passa per il suo centro ottico senza essere deviato
- c un raggio di luce parallelo all'asse ottico esce dalla lente dirigendosi su un fuoco
- d nessuna delle precedenti proprietà

24 Quali punti, in una lente, sono detti punti cardinali?

- a il centro ottico O
- b i due fuochi F_1 e F_2
- c i due punti P_1 e P_2 distanti dalla lente $2f$
- d tutti i precedenti

25 Un oggetto è posto tra una lente sottile convergente e un suo fuoco. Quali caratteristiche possiede la sua immagine?

- a l'immagine è virtuale, ingrandita e rovesciata
- b l'immagine è virtuale, ingrandita e diritta
- c l'immagine è virtuale, rimpicciolita e diritta
- d l'immagine è virtuale, rimpicciolita e rovesciata

26 Un oggetto è posto a una distanza pari a $2f$ da una lente sottile convergente. Quali caratteristiche possiede la sua immagine?

- a l'immagine è reale, ingrandita e rovesciata
- b l'immagine è reale, rimpicciolita e rovesciata
- c l'immagine è reale, uguale e rovesciata
- d nessuna delle precedenti

27 Un oggetto è posto a una distanza maggiore di $2f$ da una lente sottile convergente. Dove si viene a formare la sua immagine?

- a oltre il doppio della distanza focale
- b tra il fuoco e il doppio della distanza focale
- c esattamente sul fuoco
- d esattamente sul doppio della distanza focale

28 Una sorgente luminosa si trova a 2 m da una lente sottile convergente con $f = 50$ cm. A quale distanza dalla lente si forma l'immagine?

- a 67 cm
- b 50 cm
- c 100 cm
- d 84 cm

29 Con i dati del quesito precedente, qual è l'ingrandimento lineare della lente?

- a 3
- b 2,9
- c 0,33
- d 0,6

30 Con i dati del quesito precedente, quante diottrie possiede la lente?

- a 1 m^{-1}
- b 2 m^{-1}
- c 3 m^{-1}
- d 0,5 m^{-1}

31 Quale relazione intercorre tra l'ingrandimento lineare e quello angolare di una lente sottile convergente?

- a hanno sempre valori uguali
- b hanno valori opposti
- c hanno valori inversi
- d non c'è nessuna relazione

32 Quando un sistema di due lenti sottili convergenti con distanze focali f_1 ed f_2 e distanti Δ, diventa divergente?

- a mai
- b sempre
- c solo se $f_1 + f_2 = \Delta$
- d solo se $f_1 + f_2 < \Delta$

33 Quando un sistema di due lenti sottili convergenti con distanze focali f_1 ed f_2 e distanti Δ, si definisce focale?

- a quando $f_1 = f_2$
- b quando $\Delta = 0$
- c quando $f_1 + f_2 = \Delta$
- d quando $f_1 + f_2 < \Delta$

34 In che modo si può limitare l'aberrazione sferica di una lente?

- a realizzando la lente con un grande diametro
- b anteponendo alla lente un diaframma
- c realizzando la lente con un basso indice di rifrazione
- d non è mai possibile

35 In che modo si può limitare l'aberrazione cromatica di una lente?

- a realizzando la lente con un piccolo diametro
- b anteponendo alla lente un diaframma
- c adottando un sistema di due lenti a contatto
- d non è mai possibile

B. Verifica delle competenze

● Esercizi e problemi

36 Calcolare la rotazione da dare a una lastra a facce piane e parallele di vetro flint dello spessore di 15 mm, per ottenere uno spostamento del raggio luminoso pari a 0,05 cm. [$5°5'35''$]

37 Calcolare lo spessore che deve avere una lastra a facce piane e parallele di vetro flint, in modo che imprimendole una rotazione di 10° il raggio luminoso venga spostato di 0,1 cm. [15,3 mm]

38 Una sorgente luminosa, posta a 10 m da uno specchio piano, emette un raggio che incontra lo specchio con un angolo di incidenza di 60° e si riflette fino ad arrivare su uno schermo posto parallelamente allo specchio. Sapendo che tutto il cammino percorso dal raggio è pari a 50 m, calcolare la distanza tra lo specchio e lo schermo. [15 m]

39 Una sorgente luminosa è posta a 7 m di altezza al di sopra del suolo. Calcolare la lunghezza dell'ombra gettata sul suolo da un'asta verticale di 3 m di altezza, posta a 4 m dalla verticale passante per la sorgente. [3 m]

40 Una sorgente puntiforme S illumina una parete piana posta a 3 m di distanza. Calcolare l'area dell'ombra di uno schermo rettangolare con i lati di 10 cm × 30 cm, posto alla distanza di 1,2 m dalla sorgente, col centro sulla normale abbassata da questa sulla parete e giacente su un piano parallelo a quello della parete. [1875 cm^2]

41 Un raggio di luce monocromatica, penetrando in una soluzione biologica sotto un angolo di incidenza di 50°, viene deviato dalla direzione d'incidenza di un angolo pari a 10°. Calcolare l'indice di rifrazione della soluzione. [1,19]

42 Un raggio luminoso monocromatico proveniente dall'aria penetra in un mezzo trasparente avente indice di rifrazione pari a 1,192. Calcolare la direzione del raggio incidente in modo che gli angoli di incidenza e di rifrazione siano complementari. [50°]

43 Calcolare l'indice di rifrazione del diamante sapendo che l'angolo limite del mezzo considerato rispetto all'aria è pari a 23°56′. [2,465]

44 Calcolare l'angolo limite per le seguenti sostanze di cui è dato l'indice di rifrazione: *a*) ambra $n = 1{,}546$; *b*) quarzo $n = 1{,}458$. [*a*) 40°18′11″; *b*) 43°18′15″]

45 Un oggetto luminoso, posto alla distanza di 60 cm da una lente sottile convergente, origina un'immagine che si forma a una distanza di 35 cm dalla lente. Calcolare la distanza focale della lente e dire come sarà l'immagine. [22,10 cm; capovolta, rimpicciolita, reale]

46 Un oggetto luminoso alto 15 cm e disposto a 25 cm da una lente convergente origina un'immagine virtuale alta 40 cm. Calcolare la posizione dell'immagine e la distanza focale della lente. [66,66 cm; 40 cm]

47 Di fronte a una lente di distanza focale pari a 30 cm, si pone un oggetto di altezza pari a 1,20 m. Si calcoli a quale distanza occorre porre uno schermo affinché l'immagine dell'oggetto abbia su di esso un'altezza di 5 cm. [31,25 cm]

48 Una lente convergente ha la distanza focale di 1 m. Calcolare a quale distanza dalla lente si forma l'immagine di un oggetto posto a 1,5 m dalla stessa, e dire come sarà l'immagine.
[3 m; reale, capovolta, ingrandita]

49 Spostando un oggetto lungo l'asse ottico di una lente sottile convergente, quando l'oggetto si trova sia a 20 cm sia a 10 cm dalla lente si formano due immagini 3 volte più grandi dell'oggetto. Calcolare la distanza focale della lente e le distanze delle due immagini dalla stessa. [15 cm; 60 cm; 30 cm]

50 Una lente convergente origina l'immagine virtuale di un oggetto posto alla distanza di 4 cm dalla stessa. Sapendo che l'ingrandimento lineare è pari a 5, calcolare la distanza focale della lente e l'ingrandimento angolare. [5 cm; 5]

51 Un oggetto si trova alla distanza di 6 cm da una lente convergente con distanza focale di 10 cm. Calcolare la distanza dell'immagine dalla lente e l'ingrandimento angolare. [15 cm; 2,5]

52 Una lente divergente presenta una distanza focale di −0,50 m; calcolare la distanza a cui si forma la sua immagine e l'ingrandimento che assume. [−40 cm; 0,20]

53 Due lenti sottili, una convergente e una divergente, hanno rispettivamente distanza focale +20 cm e −20 cm, e distano tra loro 10 cm. Determinare distanza focale e distanza dalla seconda lente della lente risultante del sistema. [40 cm; 20 cm]

54 Un proiettore per diapositive è caratterizzato da una lente con distanza focale di 40 cm. Calcolare le dimensioni dell'immagine che si forma sopra uno schermo posto alla distanza di 12 m dalla lente quando si proietta una diapositiva di 6 cm × 12 cm.
[180 cm × 360 cm]

55 Un punto luminoso P è situato a 5 cm dall'asse ottico di una lente convergente di potere diottrico 10 m^{-1}. Dopo la rifrazione i raggi sono divergenti e fra il raggio che passa per il centro ottico e il raggio che passa per il fuoco vi è un angolo di 5°. Determinare a quale distanza dalla lente si trova il punto luminoso P.
[8,1 cm]

56 Determinare lo spostamento lineare che subisce un raggio luminoso nell'attraversare una lamina a facce piane e parallele di vetro con spessore 1,7 cm e con indice di rifrazione relativo aria-vetro pari a $n = 1{,}58$, sapendo che l'angolo di incidenza del raggio luminoso rispetto alla normale della prima faccia della lamina è di $8°10'$. [0,889 mm]

57 Un raggio luminoso, dopo avere attraversato una lamina a facce piane e parallele di vetro con spessore 2 cm e con indice di rifrazione relativo aria-vetro pari a $n = 1{,}60$, arriva su un'asta graduata sulla quale si esegue la lettura $L_1 = 1{,}343$ m. Facendo ruotare la lamina, sulla graduazione dell'asta viene eseguita la nuova lettura $L_2 = 1{,}345$ m. Determinare l'angolo di cui è stata ruotata la lamina e che ha reso possibile la seconda lettura L_2. [$15°16'44''$]

58 Determinare lo spessore che deve possedere una lamina a facce piane e parallele di vetro con indice di rifrazione relativo aria-vetro pari a $n = 1{,}54$, affinché essa possa traslare un raggio luminoso di una quantità pari a un decimo di millimetro (0,10 mm) per ogni grado centesimale ($1^c{,}0000$) di rotazione della stessa lamina. [18,1 mm]

59 Due lenti convergenti L_1 e L_2 hanno le seguenti distanze focali: $f_1 = 54$ mm ; $f_2 = 68$ mm. Esse sono poste a una distanza relativa di 4,5 cm. Determinare il valore della distanza focale della lente risultante del sistema di lenti L_1 e L_2 e la distanza di questa risultante dalla lente L_1. [47,7 mm; 5,26 mm]

60 Due lenti convergenti L_1 e L_2 hanno le seguenti distanze focali: $f_1 = 20$ mm; $f_2 = 240$ mm. Esse formano un sistema in posizione telescopica. Determinare il valore dell'ingrandimento lineare del sistema di lenti L_1 e L_2. [12]

Risultati dei quesiti a risposta multipla

16c, 17b, 18a, 19b, 20d, 21a, 22c, 23d, 24d, 25b, 26c, 27b, 28a, 29c, 30b, 31c, 32d, 33c, 34b, 35c.

AUTOVALUTAZIONE